Solucionario Álgebra 2.°

TEORÍA DE EXPONENTES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. $P = \dfrac{2^{n+1}(2^2 - 1)}{2^n} = \dfrac{2^n . 2 . 3}{2^n}$

$\therefore P = 6$

Clave C

4. $E = (2^8)^{-3} . (2^2)^{2^4} = 2^{-24} . 2^{2 . 16}$

$E = 2^{-24} . 2^{32} = 2^{-24 + 32} = 2^8$

$\therefore\ E = 256$

Clave E

5. $R = 1 + 5^1 + 4^2 + 3^3$

$R = 1 + 5 + 16 + 27$

$\therefore R = 49$

Clave A

6. $\dfrac{x^4 y^3}{x^2 y^2} + \dfrac{x^3 y^4}{x y^3}$

$= x^{4-2} . y^{3-2} + x^{3-1} y^{4-3}$

$= x^2 y + x^2 y$

$= 2x^2 y$

Clave B

7. $S = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1000}$

$S = 2 + 10$

$\therefore\ S = 12$

Clave B

8. $R = \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{81} + \sqrt{16}$

$R = 3 + 3 + 4$

$\therefore\ R = 10$

Clave C

9. $P = 32\left(\dfrac{1}{2^2}\right) + 16\left(\dfrac{1}{2^4}\right)$

$P = 8 + 1 = 9$

Clave C

Resolución de problemas

10. $P = 2^2 + 3^3 + 4 = 5(7) = ab$

$\Rightarrow a + b = 12$

Clave E

11. $\dfrac{3^x(1 + 3 + 3^2)}{3^x} = 13$

Por consiguiente, la igualdad se verifica cuando x toma cualquier valor real. Por lo tanto: $x \in \mathbb{R}$

Clave C

Nivel 2 (página 9) Unidad 1

Comunicación matemática

12.

13.

Razonamiento y demostración

14. $S = 5^{1^{2^0}} + 6^{2^{1^0}} - 7^{0^{2^1}} + 8^{2^{1^0}}$

$S = 5^{1^1} + 6^{2^1} - 7^{0^2} + 8^{2^1}$

$S = 5 + 36 - 1 + 64$

$\therefore S = 104$

Clave A

15. $A = 16 . \dfrac{1}{8} + 16 + 16$

$A = 2 + 32$

$\therefore A = 34$

Clave B

16. $M = 1 + 1 = 2$

$N = 9 + 1 - 1 = 9$

$\therefore M + 2N = 2 + 2(9) = 20$

Clave E

17. $\sqrt{64 + 36} + \sqrt{576 + 49} = \sqrt{100} + \sqrt{625}$

$= 10 + 25 = 35$

Clave C

18. $\left[5^2(5^{-3} . 5^{1/2})^{1/4}\right]^8 = 5^{16}(5^{-5/2})^2 = 5^{11}$ l.q.q.d

19. $\dfrac{\left[(x^{\frac{1}{2}})^{60}(y^{\frac{1}{5}})^{60}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(xy^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right]^{30}} = \dfrac{\left(x^{30}y^{12}\right)^{\frac{1}{2}}}{(x\sqrt{y})^{10}} = \dfrac{x^{15}y^6}{x^{10}y^5} = x^5 y$ l.q.q.d

Resolución de problemas

20. $\underbrace{(2 . 2 . 2 \ldots 2)}_{\text{8 veces}} - \underbrace{(2 + 2 + \ldots + 2)}_{\text{x sumandos}} = 0$

$2^8 - 2x = 0$

$2^8 = 2x$

$2^7 = x$

$\therefore x = 128$

Clave A

21. $A = \dfrac{2^a(2^3 - 1)}{2^b(2 - 1)} = \dfrac{2^a}{2^b}(7)$

Por dato A = 7, entonces:

$\dfrac{2^a}{2^b}(7) = 7$

$\Rightarrow 2^{a-b} = 1 = 2^0$

$\therefore a = b$

Clave C

Nivel 3 (página 9) Unidad 1

Comunicación matemática

22.

23.

Razonamiento y demostración

24. $M = \dfrac{5^{a+2} + 5^{a+3}}{5^{a+1}(1 + 5)} = \dfrac{5^{a+2}(1 + 5)}{5^{a+1} . 6}$

$\therefore M = \dfrac{5^{a+2}}{5^{a+1}} = 5$

Clave E

25. $E = \dfrac{\overbrace{6 . 6 . 6 \ldots 6}^{\text{40 factores}}}{\underbrace{6 . 6 . 6 \ldots 6}_{\text{37 factores}}}$

$\therefore E = \dfrac{6^{40}}{6^{37}} = 6^{40-37} = 6^3 = 216$

Clave C

26. $W = \dfrac{3^2}{(-3)^5} + (-3)^{-3} + 4^{2^{-2^0}}$

$W = -\dfrac{2}{27} + 2 = \dfrac{52}{27}$ l.q.q.d.

27. $C = \dfrac{2^{x-1}(5 . 2^3 + 6 - 2 . 2^4)}{2^{x-1}(4 . 2^4 - 30 - 2 . 2^4)} = \dfrac{14}{2} = 7$

Clave D

28. $R = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2^2} = 3^3 - 2^4 = 27 - 16 = 11$

Clave A

29. $P = 5^{2^0} + 27^{3^{-1}} - 16^{2^{-2}}$

$P = 5^1 + 27^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{4}}$

$P = 5 + \sqrt[3]{27} - 16^{\frac{1}{4}}$

$P = 5 + 3 - \sqrt[4]{16} = 8 - 2$

$\therefore P = 6$

Clave D

30. $2^a - 2b = 12 \Rightarrow 2^5 - 2(10) = 12 \Rightarrow a = 5$

$b = 10$

Clave E

31. $A = 5^{a-b} = 5^4 = 625$

Clave D

ECUACIONES EXPONENCIALES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 13) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. $3^{y-1}(1+3^2)=90$

$3^{y-1}\,.\,10=90$

$3^{y-1}=9=3^2$

$\Rightarrow y-1=2$

$\therefore\ y=3$

Clave D

4. $13^{2X}(13+1)=14$

$13^{2X}\,.\,14=14$

$13^{2X}=1 \Rightarrow 2x=0$

$\therefore\ x=0$

Clave E

5. $3^{x+1}(3+1)=108$

$3^{x+1}\,.\,4=108$

$3^{x+1}=27=3^3$

$\therefore\ x=2$

Clave C

6. $2^{n+3}(2^2+1)=320$

$2^{n+3}\,.\,5=320$

$2^{n+3}=64=2^6$

$\therefore\ n=3$

Clave B

7. $3^{2x+1}(3^2+1)=270$

$3^{2x+1}\,.\,10=270$

$3^{2x+1}=27=3^3$

$\Rightarrow 2x+1=3$

$\therefore\ x=1$

Clave B

8. $2^{3y+1}(1+2^2)=640$

$2^{3y+1}\,.\,5=640$

$2^{3y+1}=128=2^7$

$3y+1=7$

$\therefore\ y=2$

Clave E

9. $4^{a-4}(1+4+4^3)=69$

$4^{a-4}\,.\,69=69$

$4^{a-4}=1$

$\therefore\ a=4$

Clave A

10. $5^n(5^3-1)=3100$

$5^n\,.\,124=3100$

$5^n=25 \Rightarrow n=2$

$\therefore\ E=2^2=4$

Clave C

11. $13^{n+1}+13^n=2366$

$13^n\,.\,13+13^n\,.\,1=2366$

$13^n(13+1)=2366$

$13^n\,.\,14=2366$

$13^n=169$

$13^n=13^2$

$\therefore\ n=2$

Clave B

Resolución de problemas

12. $4x-1=0$

Clave C

13. $\sqrt{a^{x+3x}}=a^{y+2} \Rightarrow 2x=y+2$

$\Rightarrow 2x-y=2$

Clave C

Nivel 2 (página 13) Unidad 1

Comunicación matemática

14.

15.

16.

17.

Razonamiento y demostración

18. $a^{\frac{x-4}{8}}=a^1$

Entonces:

$\frac{x-4}{8}=1$

$x-4=8$

$\therefore\ x=12$

Clave A

19. $a^{\frac{3x-9}{x-1}}=a^2$

Entonces:

$\frac{3x-9}{x-1}=2 \Rightarrow 3x-9=2x-2$

$\therefore\ x=7$

Clave C

20. $a^{\frac{n+1}{2n-4}}=a^1$

$\frac{n+1}{2n-4}=1 \Rightarrow n+1=2n-4$

$\therefore\ n=5$

Clave A

21. $2^{3^{8^x}}=512=2^9$

$\Rightarrow 3^{8^x}=9=3^2$

$\Rightarrow 8^x=2$

$(2^3)^x=2^1 \Rightarrow 2^{3x}=2^1$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}$

Clave A

22. $\frac{5^{16}+5^x}{5^x+5^2}=5^7$

$5^{16}+5^x=5^{x+7}+5^9$

$5^9(5^7-1)=5^x(5^7-1) \quad \Rightarrow \quad 5^9=5^x$

$\therefore\ x=9$

Clave E

23. $\frac{7^{10}+7^x}{7^x+7^2}=7^4 \Rightarrow 7^{10}+7^x=7^{x+4}+7^6$

$7^6(7^4-1)=7^x(7^4-1)$

$\Rightarrow 7^6=7^x$

$\therefore\ x=6$

Clave E

24. $(0,1)^{0,2}\,.\,(0,2)^{0,3}=2^x\,.\,5^y$

$\left(\frac{1}{10}\right)^{0,2}\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^{0,3}=2^x\,.\,5^y$

$10^{-0,2}\,.\,5^{-0,3}=2^x\,.\,5^y$

$5^{-0,2}.2^{-0,2}.5^{-0,3}=2^x\,.\,5^y$

$2^{-0,2}.5^{-0,5.}=2^x\,.\,5^y$

Igualamos exponentes:

$x=-0,2 \ \wedge\ y=-0,5$

Nos piden:

$x+y=-0,7$

Clave B

25. $M=\underbrace{5^{x-4}.5^{x-4}.5^{x-4}...5^{x-4}}_{12\text{ factores}}=625^3$

$(5^{x-4})^{12}=(5^4)^3$

$5^{12x-48}=5^{12}$

Igualamos exponentes:

$12x-48=12$

$\Rightarrow 12x=60$

$\therefore\ x=5$

Clave A

26. $\underbrace{3x+3x+...+3x}_{27\text{ veces}}=9^7$

Reducimos:

$27.3^x=9^7$

$3^3.3^x = (3^2)^7 \Rightarrow 3^{3+x} = 3^{14}$

Igualamos exponentes:

$3 + x = 14 \Rightarrow x = 11$

Clave B

27. $M = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}.x^{\frac{15}{8}} = 9$

$\sqrt[8]{x}.x^{\frac{15}{8}} = 9$

$x^{\frac{1}{8}}.x^{\frac{15}{8}} = 9$

$x^{\frac{16}{8}} = 9$

$x^2 = 3^2$

$\Rightarrow x = 3$

Clave B

Resolución de problemas

28. $\sqrt[3]{x^{\sqrt[3]{x^3}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow E = 71$

Clave A

29. $3^{2^{4^x}} = 3^{2^2}$

$\Rightarrow 4^x = 2$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Clave E

Nivel 3 (página 14) Unidad 1

Comunicación matemática

30.

31.

Razonamiento y demostración

32. $\frac{9^{2m+1}}{\sqrt{27}} = 3^{m-1}$

$\frac{(3^2)^{2m+1}}{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{m-1}$

$3^{4m+2-\frac{3}{2}} = 3^{m-1}$

Entonces:

$4m + 2 - \frac{3}{2} = m - 1$

$3m = -3 + \frac{3}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

Clave B

33. $3^{64^{x-3}} = 3^{2^{5x-20}}$

$64^{x-3} = 2^{5x-20}$

$(2^6)^{x-3} = 2^{5x-20}$

$2^{6x-18} = 2^{5x-20}$

$\Rightarrow 6x - 18 = 5x - 20$

$\therefore x = -2$

Clave C

34. $\sqrt[4]{b^{3x-7}} = b^{x-5}$

$b^{\frac{3x-7}{4}} = b^{x-5}$

$\frac{3x-7}{4} = x - 5$

$3x - 7 = 4x - 20$

$\therefore x = 13$

Clave C

35. $\sqrt[3]{a^{m+7}} = \sqrt[4]{a^{m+12}}$

$a^{\frac{m+7}{3}} = a^{\frac{m+12}{4}}$

$\Rightarrow \frac{m+7}{3} = \frac{m+12}{4}$

$4m + 28 = 3m + 36$

$\therefore m = 8$

Clave E

36. $2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} = 224$

$2^{n-3}(2^2 + 2 + 1) = 224$

$2^{n-3}.7 = 224$

$2^{n-3} = 32 = 2^5$

$\Rightarrow n - 3 = 5$

$\therefore n = 8$

Clave B

37. $b^{\frac{4x-17}{3}} = b^{x-4}$

$\Rightarrow \frac{4x-17}{3} = x - 4$

$4x - 17 = 3x - 12$

$\therefore x = 5$

Clave E

38. $\frac{(x^3)^5(x^2)^7}{(x^{13})^2} = \frac{9^7.27^6.81^8}{3^{16}}$

$\frac{x^{15}.x^{14}}{x^{26}} = \frac{(3^2)^7.(3^3)^6.(3^4)^8}{3^{16}}$

$\frac{x^{15+14}}{x^{26}} = \frac{3^{14}.3^{18}.3^{32}}{3^{16}}$

$\frac{x^{29}}{x^{26}} = \frac{3^{14+18+32}}{3^{16}}$

$\frac{x^{29}}{x^{26}} = \frac{3^{64}}{3^{16}}$

Restamos los exponentes:

$x^3 = 3^{48}$

$x^3 = 3^{3.16} \Rightarrow x = 3^{16}$

Nos piden: $S = \sqrt[8]{x} = \sqrt[8]{3^{16}} = 3^2 = 9$

Clave D

39. $x^{x+1} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

$x^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}+1}$

$\therefore x = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

Clave C

Resolución de problemas

40. $(3x)^{3x} = 0{,}5^{0{,}5} \Rightarrow 3x = 0{,}5$

$E = \sqrt[0{,}5]{\frac{3}{0{,}5}} = 36$

Clave A

41. $\frac{3x - 3 + 4x + 2}{6} = \frac{3x - 2}{4}$

$x = -\frac{4}{5} = -\frac{m}{n} \Rightarrow m+n = 9$

Clave B

POLINOMIOS

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 18) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. $P(x) = x^x - 1 + x^{x-1}$

$P(2) = 2^2 - 1 + 2^{2-1} = 4 - 1 + 2$

$\Rightarrow P(2) = 5$

Clave E

4. $F(x + 2) = x^2 + x + 1$

Piden: $F(5)$

Entonces: $x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$

Por lo tanto: $F(5) = 3^2 + 3 + 1 = 13$

Clave C

5. $P(x) = 2x^4 + x - 1$

$P(2) = 2(2)^4 + 2 - 1 = 33$

Piden: $\sqrt{P(2) + 3} = \sqrt{33 + 3} = \sqrt{36} = 6$

Clave D

6. $P(x) = x^2 - 3x + 8$

$P(6) = (6)^2 - 3(6) + 8 = 26$

Piden:

$\sqrt{P(6) - 1} = \sqrt{26 - 1} = \sqrt{25} = 5$

Clave A

7. $F(x) = 3(x - 3) + 2$

$F(1) = 3(1 - 3) + 2 = -4$

Piden:

$\sqrt{F(1) + 5} = \sqrt{-4 + 5} = \sqrt{1} = 1$

Clave B

8. Suma de coeficientes $= P(1)$

$P(1) = \sqrt{2} + 3 + 2m - 3 - \sqrt{2}$

$P(1) = 2m$

Por ser P(x) completo:

$m - 5 = 2 \Rightarrow m = 7$

$\therefore\ P(1) = 2m = 14$

Clave D

9. $P(x) = 3x - 2$

$P(a) = 3a - 2 = a \Rightarrow a = 1$

Clave A

10. $P(x; y) = \sqrt{2}\,x^4y^5 - \frac{1}{4}x^7y - 4$

$GA(P) = 4 + 5 = 9$

Clave C

11. $P(x; y) = 5x^{a+3}y^6 + 6x^ay^8$

$GR(x) = a + 3 = 4 \Rightarrow a = 1$

Clave A

Resolución de problemas

12. $8x + 27 \equiv p(x + 4) + q\,(2x + 3)$

Como son idénticos siempre se cumple la igualdad.

Sea:

$x = -4 \Rightarrow 8(-4) + 27 = p(-4 + 4) + q(-8 + 3)$

$-5 = -5q \Rightarrow q = 1$

Sea: $x = 0 \Rightarrow 27 = 4p + 3q$

$27 = 4p + 3\,(1) \Rightarrow p = 6$

Nos piden:

$p - q = 6 - 1 = 5$

Clave B

13. Del binomio homogéneo se cumple:

$3a + 27 - 2b = 2b + 23 - 3a$

$\Rightarrow 3a - 2b = -2$

El grado será:

$GA(P) = (3a - 2b) + 27 = -2 + 27 = 25$

Clave E

14. Por ser homogéneo:

$a^a + 5 = b^b + a^a - 22 \Rightarrow b = 3$

$\Sigma Coef. = b^a - b^a + b^ab^{2-a} = b^2 = 3^2 = 9$

Clave E

Nivel 2 (página 19) Unidad 1

Comunicación matemática

15. $F(x) = 3x \boxed{+} 1$

$G(x) = x^2 \boxed{+} x \boxed{-} 1 \Rightarrow G(-1) = (-1)^2 + (-1) - 1$

$G(-1) = -1$

$F(G(-1)) = F(-1) = 3(-1) + 1 = -2$

16.

Razonamiento y demostración

17. $VN(E) = \sqrt[3]{xy + 2z + 5}$

Para $x = -1;\ y = -2;\ z = 10$

$VN(E) = \sqrt[3]{(-1)(-2) + 2(10) + 5}$

$VN(E) = \sqrt[3]{27} = 3$

Clave B

18. $A(x) = 3x - 1$

$B(x) = 2x + 1$

$C(x) = 3x - 2$

$A(2) = 3(2) - 1 = 5$

$B(A(2)) = B(5) = 2(5) + 1 = 11$

$C(B(A(2))) = C(11) = 3(11) - 2 = 31$

Clave E

19. $P(x, y) = (a^2 + 1)x^{a^2+2}.\ y^a + (a - 1)x^{2a}.\ y^{a^2-3}$

Si es homogéneo se cumple:

$a^2 + 2 + a = 2a + a^2 - 3$

$a = 5$

Nos piden:

$\Sigma Coef. = a^2 + 1 + a - 1 = a^2 + a$

$= 5^2 + 5 = 30$

Clave D

20. $P(x - 1) = x^2 - 2x + 1 - 1$

$P(x - 1) = (x - 1)^2 - 1$

Luego: $P(x) = x^2 - 1$

$\therefore P(\sqrt{2 - x}) = (\sqrt{2 - x})^2 - 1 = 1 - x$

Clave A

21. $F(x + 1) = \dfrac{x + 5}{x + 3}$

Hacemos: $x \to m - 1$

$F(m - 1 + 1) = \dfrac{m - 1 + 5}{m - 1 + 3}$

$F(m) = \dfrac{m + 4}{m + 2} = -1$

$\Rightarrow m + 4 = -m - 2 \Rightarrow m = -3$

Clave E

22. $GA(P) = n + (2n + 1) + 3\,.\,2$

$31 = 3n + 7 \Rightarrow 24 = 3n$

$\therefore\ n = 8$

Clave C

23. $P(x) = 4x^{a+2} - 7x^{2a+7} + 5x^{2a+4}$

$GA(P) = 2a + 7 = 17 \Rightarrow a = 5$

Clave E

24. $P(x) = 2\sqrt{3}\,x^{m+7} + 5x^{2m+7} - 7x^{2m-7}$

$GA(P) = 2m + 7 = 23 \Rightarrow m = 8$

Clave B

25. $P(x; y) = -\frac{1}{4}x^{7m-2} - \sqrt{2}\,x^{6m}y^{4-m} + 8x^{7m+6}y^{7-m}$

$GR(x) = 7m + 6 = 20$

$m = 2$

$GR(y) = 7 - m = 7 - 2 = 5$

Nos piden:

$GR(y) + m^2 = 5 + 2^2 = 9$

Clave D

26. $P(x; y) = x^2y^n - 1/4x^{n+2}y^{n-1} + 10$

$GR(x) = n + 2 = 7 \Rightarrow n = 5$

Piden: $n^2 - 1 = 25 - 1 = 24$

Clave C

27. $P(x; y) = \sqrt{3}x^ay^b - \frac{\sqrt{7}}{4}x^{a+5}y^7 + y^{b+7}$

$GR(x) = a + 5 = 5 \Rightarrow a = 0$

Clave A

28. $P(y) = 2y^{2m+1} - 3y^{m+7} + y^{2m+7} + 8$

$GR(y) = 2m + 7 = 9 \Rightarrow m = 1$

Clave A

29. $GR(y) = 5$

$\Rightarrow \frac{b+1}{3} = 5 \Rightarrow b = 14$

$GR(x) = 18$

$\Rightarrow a + 2 = 18 \Rightarrow a = 16$

$\therefore (a - b)^8 = 2^8 = 256$

Clave B

30. $GR(y) = 2$

$\Rightarrow \frac{b+2}{4} = 2 \Rightarrow b = 6$

$GR(M) = 8$

$a + 5 + \underbrace{\frac{b+2}{4}}_{2} = 8 \Rightarrow a = 1$

$\therefore a - b = 1 - 6 = -5$

Clave C

Resolución de problemas

31. $P(x + 1) = 2x - 1$ ...(I)

$Q(x - 1) = 2x + 1$ ...(II)

De (II): $x = 0 \Rightarrow Q(-1) = 1$

De (I): $x = 0 \Rightarrow P(1) = -1$

Nos piden:

$P(\underbrace{Q(-1)}_{1}) + Q(\underbrace{P(1)}_{-1}) = \underbrace{P(1)}_{-1} + \underbrace{Q(-1)}_{1}$

$= -1 + 1 = 0$

Clave B

32. Del polinomio homogéneo:

$\underset{(i)}{n^7 + 3n^3 + 7} = \underset{(ii)}{2a + b} = \underset{(iii)}{3n^3 + 135}$

(i) y (iii): $n^7 + 3n^3 + 7 = 3n^3 + 135 \Rightarrow n = 2$

(ii) y (iii): $2a + b = 3n^3 + 135 \Rightarrow 2a + b = 159$

$\Sigma Coef. = 14a + 6(a + b) + (4b + 2)$

$= 10(2a + b) + 2$

$= 10(159) + 2$

$= 1592$

Clave C

33. El grado de homogeneidad se expresará como:

$\underset{(i)}{p + q + 3} = \underset{(ii)}{p + r + 3} = \underset{(iii)}{q + r + 3}$

$\left.\begin{aligned} &\text{(i) y (ii): } p + q + 3 = p + r + 3 \Rightarrow q = r \\ &\text{(ii) y (iii): } p + r + 3 = q + r + 3 \Rightarrow p = q \\ &\text{(i) y (iii): } p + q + 3 = q + r + 3 \Rightarrow p = r \end{aligned}\right\} p = r = q$

Nos piden:

$T = \sqrt[\frac{1-2n}{3}]{\frac{r^{2n} + r^{2n}}{(r + r)^{2n}}} = \sqrt[\frac{1-2n}{3}]{2^{1-2n}} = 8$

Clave D

34. $P_1(t,u,w) = rw + at^2 - bu^2 + p$

$P_2(t,uw) = rw + (2b + 3)t^2 + (a + 3)u^2 + p$

Por ser idénticos:

$\left.\begin{aligned} 2b + 3 &= a \\ a + 3 &= -b \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -2 \end{aligned}$

Clave E

Nivel 3 (página 20) Unidad 1

Comunicación matemática

35.

36. $GA(P) = 36 = 3a + 3 \Rightarrow a = 11$

$\left.\begin{aligned} GR(x) &= 2a = 2(11) = 22 \\ GR(y) &= a + 7 = 11 + 7 = 18 \end{aligned}\right\} GR(x) + GR(y) = 40$

Razonamiento y demostración

37. Si se anula para cualquier valor de x

$\Rightarrow P(x) = 0$

Luego:

$\left.\begin{aligned} a + b - 2 = 0 \Rightarrow a + b = 2 \\ a + c - 3 = 0 \Rightarrow a + c = 3 \\ b + c - 5 = 0 \Rightarrow b + c = 5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 2a + 2b + 2c = 10 \\ a + b + c = 5 \end{aligned}$

l.q.q.d.

38. $P(x) = x^{24} + 128x^{17} + 2x^{11} + 64x^6 + 4x + 2$

Haciemos $x = -2$

$P(-2) = (-2)^{24} + 128(-2)^{17} + 2(-2)^{11} + 64(-2)^6 + 4(-2) + 2$

$P(-2) = 2^{24} - 2^7 \,.\, 2^{17} - 2 \,.\, 2^{11} + 2^6 \,.\, 2^6 - 8 + 2$

$P(-2) = 2^{24} - 2^{24} - 2^{12} + 2^{12} - 6 = -6$

Clave B

39. $P(x + y; 2x - y) = x^2 + y^2$

$P(2; 1) = ?$

Sea: $\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$

Reemplazamos: $P(2; 1) = 1^2 + 1^2 = 2$

Clave B

40. $f(2) = 5 \wedge f(3) = 7$

Luego:

$\underbrace{f(2)}_{5} = 2a + b$

$5 = 2a + b$ ...(1)

$\underbrace{f(3)}_{7} = 3a + b$

$7 = 3a + b$ ...(2)

De (1) y (2):

$\Rightarrow a = 2 ; b = 1$

$\Rightarrow f(x) = 2x + 1$

Entonces:

$f(0) = 1; f(1) = 3 \wedge f(5) = 11$

$\therefore f(0) + f(1) + f(5) = 15$

Clave C

41. $P(x - m) = x^2 - (m - 1)x + 3$

Dato: $P(1) = 17$

Sea: $x = 1 + m$

Reemplazamos:

$P(1) = (m + 1)^2 - (m - 1)(m + 1) + 3 = 17$

$P(1) = m^2 + 2m + 1 - (m^2 - 1) + 3 = 17$

$2m + 5 = 17 \Rightarrow 2m = 12$

$\Rightarrow m = 6$

Nos piden: $m^2 - m + 1 = 6^2 - 6 + 1 = 31$

Clave D

42. $F(x) = (x - 1)^2 + 10$

Hacemos: $x \to x - 2$

$F(x - 2) = (x - 2 - 1)^2 + 10 = (x - 3)^2 + 10$

$F(x - 2) = x^2 - 6x + 19$

Nos piden:

$\frac{F(x) - F(x-2)}{x - 2} = \frac{(x-1)^2 + 10 - (x^2 - 6x + 19)}{x - 2}$

$= \frac{x^2 - 2x + 11 - x^2 + 6x - 19}{x - 2} = \frac{4x - 8}{x - 2}$

$= \frac{4(x - 2)}{x - 2} = 4$

Clave E

43. $P(g(x)) = 6x + 5$ ... (I)

$P(x) = 3x + 2$

Cambiamos: x por g(x)

$P(g(x)) = 3g(x) + 2$ ... (II)

Se observa que (I) = (II):

$3g(x) + 2 = 6x + 5$

$3g(x) = 6x + 3$

$g(x) = 2x + 1$

Hacemos:

$x = 2 \Rightarrow g(2) = 2 \,.\, 2 + 1 = 5$

$x = -3 \Rightarrow g(-3) = 2(-3) + 1 = -5$

Nos piden: $g(2) + g(-3) = 0$

Clave E

Resolución de problemas

44. El mayor grado respecto a "y" es 20, entonces

$G(x,y) = x^a + x^{a-2}y^2 + x^{a-4}y^4 + ... + x^{a-20}y^{20}$

Donde necesariamente: $a - 20 = 0$

$a = 20$

$\#$ de términos $= 10 + 1 = 11$

Clave D

45. $w(\lambda - 1) = m(\lambda - 1)^2 + f(\lambda - 1) + g$

$= m\lambda^2 + (f - 2m)\lambda + (m - f + g)$

$w(\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda + 1$

Como los polinomios son idénticos, notamos:

$m = 1, f = 1, g = 1$

Nos piden:

$$L = \left(\frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3}\right) - 1 = 0$$

Clave C

46. Por definición:

$TI = R(0) = (-2)^m(-1)^2(-m)^2 = -800$

$(-2)^m m^2 = -800$ (m: impar)

$m = 5$

$GR(x) = m + 6 + 4 = 5 + 10 = 15$

Clave A

47. $m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$

$n - m + 2 = 1 \Rightarrow n - 5 + 2 = 1 \Rightarrow n = 4$

$n + p - 5 = 2 \Rightarrow 4 + p - 5 = 2 \Rightarrow p = 3$

$p + q - 2 = 3 \Rightarrow 3 + q - 2 = 3 \Rightarrow q = 2$

$$\left(\frac{m+p}{n}\right)^{q^q} = \left(\frac{5+3}{4}\right)^{2^2} = 2^{2^2} = 16$$

Clave D

48. $\left.\begin{array}{l}(\alpha + 3) + 2 = \beta + 3 \Rightarrow \alpha - \beta = -2 \\ \alpha + \beta + 3 = 7 \Rightarrow \alpha + \beta = 4\end{array}\right\} \begin{array}{l}\alpha = 1 \\ \beta = 3\end{array}$

$... + x^{1+3}y^3 + x^{?}y^a + x^{3+3}y^1 + ...$

$... + x^4y^3 + x^5y^a + x^6y^1 + ...$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 24) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

Clave D

2.

Clave B

Razonamiento y demostración

3. $ab = 1$

$a + b = 3 \quad ...(I)$

Elevamos al cuadrado (I):

$(a + b)^2 = 9$

$a^2 + 2\underbrace{ab}_{1} + b^2 = 9 \Rightarrow a^2 + b^2 = 7$

Clave C

4. $ab = 2$

$a - b = 3 \quad ...(I)$

Elevamos al cuadrado (I):

$(a - b)^2 = 3^2$

$a^2 - 2\underbrace{ab}_{2} + b^2 = 9$

$\therefore a^2 + b^2 = 13$

Clave D

5. $a + b = 6$

$(a + b)^2 = 6^2 \Rightarrow a^2 + 2\underbrace{ab}_{3} + b^2 = 36$

$a^2 + 6 + b^2 = 36$

$\therefore R = a^2 + b^2 = 30$

Clave C

6. $M = (x + 2)^2 - (2 - x)^2 + (x - 4)^2 - x^2 - 16$

$M = \underbrace{(x + 2)^2 - (x - 2)^2}_{4x\,.\,2} + (x - 4)^2 - x^2 - 16$

Desarrollamos:

$M = 8x + x^2 - 8x + 16 - x^2 - 16 = 0$

Clave A

7. $A = \left[(5^2 - \sqrt{24}^2)(3^2 - \sqrt{8}^2)\right]^3$

$A = [(25 - 24)(9 - 8)]^3$

$A = [1\,.\,1]^3 \Rightarrow A = 1$

Clave A

8. $a^2 - b^2 = 60 \Rightarrow (a + b)(a - b) = 60$

$15(a - b) = 60 \Rightarrow a - b = 4$

$\therefore\ S = \sqrt[3]{4^2 + 11} = 3$

Clave C

9. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

$4^3 = 28 - 3ab\,.\,4$

$64 = 28 - 12ab \Rightarrow ab = -3$

$\therefore\ E = \sqrt{-3 + 4} = 1$

Clave A

10. $L = (\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1)$

Es suma de cubos:

$\therefore\ L = \sqrt[3]{3}^3 + 1^3 = 3 + 1 = 4$

Clave B

Resolución de problemas

11. Sean los números: x: menor número

x + 1: mayor número

Del enunciado:

$(x + (x + 1))^2 + (x - (x + 1))^2 - 2x^2 - (x + 1)^2$

Operando obtenemos: $(x + 1)^2$

El cuadrado del mayor número.

Clave C

12. $ab = 1$

$a + b = 2$

$a^3 + b^3 = ?$

De la Identidad de Cauchy:

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$= 2^3 - 3(1)(2) = 8 - 6$

$\therefore\ a^3 + b^3 = 2$

Clave B

Nivel 2 (página 24) Unidad 1

Comunicación matemática

13.

14.

Razonamiento y demostración

15. $\dfrac{(a + b)^2 - 2ab}{(a - b)^2 + 2ab}$

Desarrollamos:

$\dfrac{a^2 + b^2 + 2ab - 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab + 2ab} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$

Clave B

16. $\dfrac{(x + 2)^2 - 4x}{x^2 + 4}$

Desarrollamos:

$\dfrac{x^2 + 4x + 4 - 4x}{x^2 + 4} = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 4} = 1$

Clave C

17. $(x - y)^2 = (6)^2$

$x^2 - 2\underbrace{xy}_{2} + y^2 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 = 40$

$\therefore D = \dfrac{x^2 + y^2}{2} = 20$

Clave C

18. $A = \dfrac{(\sqrt[6]{5} + \sqrt[6]{6})^2 - (\sqrt[6]{5} - \sqrt[6]{6})^2}{2\sqrt[6]{30}}$

Por Legendre:

$A = \dfrac{4\sqrt[6]{5}\sqrt[6]{6}}{2\sqrt[6]{30}} = \dfrac{2\sqrt[6]{30}}{\sqrt[6]{30}} = 2$

Clave B

19. $A = \sqrt{(5^2 - \sqrt{7}^2) - (3^2 - \sqrt{5}^2) + 2}$

$A = \sqrt{(25 - 7) - (9 - 5) + 2}$

$A = \sqrt{18 - 4 + 2} \Rightarrow A = 4$

Clave B

20. $S = \sqrt[3]{(x^2 - 6^2) - (x^2 - 8^2) - 1}$

$S = \sqrt[3]{x^2 - 36 - x^2 + 64 - 1} = \sqrt[3]{27}$

$\therefore\ S = 3$

Clave E

21. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

$2^3 = a^3 - b^3 - 3\,.\,2\,.\,2$

$8 = a^3 - b^3 - 12 \Rightarrow a^3 - b^3 = 20$

$\therefore\ C = \sqrt{20 - 2.2} = 4$

Clave D

22. $Q = (\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{10^2} + \sqrt[3]{10}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2})$

$Q = (\sqrt[3]{10})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 10 - 2 = 8$

Clave D

Resolución de problemas

23. $a^3 + b^3 = 100$

$a + b = 10$

$a^2 + b^2 = ?$

Sabemos:

$\underbrace{(a + b)^3}_{10^3} = \underbrace{a^3 + b^3}_{100} + \underbrace{3ab(a + b)}_{3ab(10)}$

$\Rightarrow ab = 30$

Luego, de la suma de cubos:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$100 = 10\,(a^2 + b^2 - 30)$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 40$

Clave E

24. De la condición:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$$

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c} \qquad ...(I)$$

Elevamos al cubo miembro a miembro:

$$a+b+3\sqrt[3]{ab}\underbrace{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}_{(I)}=-c$$

$$a+b+c=3\sqrt[3]{abc}$$

Elevamos al cuadrado miembro a miembro:

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=9\sqrt[3]{(abc)}^2$$

Donde:

$$\frac{9\sqrt[3]{(abc)^2}-a^2-b^2-c^2}{ab+ac+bc}=\psi=2$$

Clave A

Nivel 3 (página 25) Unidad 1

Comunicación matemática

25. $\dfrac{(u+1)^{14}(1+u)^3(1-u)^3}{-(1+u)^{17}(1-u)^2}$

$$=-\frac{(1+u)^3(1-u)^3}{(1+u)^3(1-u)^2}=-(1-u)$$

$$=u-1 \qquad ...(F)$$

26. FVF

Razonamiento y demostración

27. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2$

$$x^2-2+x^{-2}=32 \Rightarrow x^2+x^{-2}=34$$

$$\therefore\ P=(x^2+x^{-2})^1=34$$

Clave B

28. $(a+b)^2=7^2$

$$a^2+2ab+b^2=49$$

$$a^2+2\,.\,9+b^2=49 \Rightarrow a^2+b^2=31$$

$$\therefore\ M=a^2-2ab+b^2=a^2+b^2-2ab$$

$$=31-2\,.\,9=13$$

Clave A

29. $(a-b)^2=7^2$

$$a^2-2ab+b^2=49$$

$$a^2-2(-5)+b^2=49 \Rightarrow a^2+b^2=39$$

$$\therefore\ (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=39+2(-5)=29$$

Clave B

30. $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$

$$a^2+2a.\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=18$$

$$a^2+2+a^{-2}=18 \Rightarrow a^2+a^{-2}=16$$

$$\therefore\ S=\sqrt{a^2+a^{-2}}=4$$

Clave C

31. $S=\dfrac{\sqrt{5}^2-1+3^2-\sqrt{2}^2}{8^2-\sqrt{63}^2+\sqrt{11}^2-1}$

$$S=\frac{5-1+9-2}{64-63+11-1}=\frac{11}{11}\Rightarrow S=1$$

Clave E

32. $N=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3}+\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}$

$$N=x-3+x-1 \Rightarrow N=2x-4$$

Clave C

33. $M=(a+b)(a^2+ab+b^2)(a-b)(a^2-ab+b^2)$

Acomodamos los factores:

$$M=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$$

$$M=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$$

Clave D

Resolución de problemas

34. Escribimos el primer miembro conforme se indica a continuación:

$$\underbrace{((a+3)+(b+2))^2+((a+3)-(b+2))^2}_{\text{Legendre}}$$

$$=4(a+3)(b+2)$$

$$2((a+3)^2+(b+2)^2)-4(a+3)(b+2)=0$$

$$\underbrace{(a+3)^2-2(a+3)(b+2)+(b+2)^2=0}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto (tcp)}}$$

$$((a+3)-(b+2))^2=0$$

Entonces:

$$(a+3)-(b+2)=0$$

$$a+3=b+2$$

$$\frac{a-2}{b-3}=1 \qquad ...(1)$$

$$b-a=1 \qquad ...(2)$$

(1) y (2) en "T":

$$T=(1^3-1^3)=0$$

Clave C

35. De la condición:

$$b^2+c^2=z-a^2 \qquad ...(1)$$

$$a^2(b^2+c^2)=a^2(z-a^2) \qquad ...(2)$$

Luego:

$$T=\frac{10(a^2z+b^2c^2)(z-a^2)}{\left(a^4+(a^2b^2+a^2c^2)+b^2c^2\right)\underbrace{(b^2+c^2)}_{(1)}}$$

$$T=\frac{10(a^2z+b^2c^2)(z-a^2)}{\left(a^4+\underbrace{a^2(b^2+c^2)}_{(2)}+b^2c^2\right)(z-a^2)}$$

$$=\frac{10(a^2z+b^2c^2)(z-a^2)}{(a^2z+b^2c^2)(z-a^2)}=10$$

Clave D

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 29) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

$2x+3=0$	4	8	−1	8	22
$x=-\frac{3}{2}$		−6	−3	6	−21
÷ 2	4	2	−4	14	1
	2	1	−2	7	

$R(x) = 1$ (C)

$\sum Coef.\ Q = Q(1) = 2 + 1 - 2 + 7 = 8$ (I)

$Q(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 7$ (C)

Clave B

2.

$a = n$	$c + q = 15$	$e + s = u$
$mn = 30$	$15m = r$	$w = 10$
$b + 30 = p$	$d + r = t$	
$mp = q$	$mu = -25$	

$$T = (10)^2 + \frac{30}{2} + (-25) + \frac{15}{5} = 93$$

Clave E

3.

	m	m^2	3	−2	2
1	↓	m	n	9	r
	a	6	p	q	s

(*) $m = a$

$m^2 + m = 6 \Rightarrow m(m+1) = 3 \times 2$

$m = 2$

$n = 6 . 1 = 6$

$p = n + 3 = 6 + 3 = 9$

$q = 9 - 2 = 7$

Luego: $Q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 9x + 7$

Clave C

Razonamiento y demostración

4.

1	1	−5	8	−9
1		1	1	
1			−4	−4
	1	−4	5	−13

$\therefore\ x - 4 + 5x - 13 = 6x - 17$

Clave D

5.

2	2	1	−2	8
−1		−1		
			0	
				1
	1	0	−1	9

$\therefore\ \Sigma$ coeficientes de $Q(x) = 0$

Clave A

6.

1	1	−7	6	−5	2
5		5	−4	1	
−4			−10	8	−2
1					
	1	−2	−8	4	0

$\therefore\ \Sigma$ coeficientes de $R(x) = -4$.

Clave B

7.

1	1	−2	3	−4	5	−6
2		2	−3	4		
−3			0	0	0	
4				0	0	0
	1	0	0	0	5	−6

$\therefore\ \Sigma$ coeficientes de $Q(x) = 1$.

Clave B

8.

3	12	0	−7	−9	6
0		0	4	0	−4
+1					
0					
−1					
	4	0	−3	−9	2

$\therefore\ Q(x) = 4$

Clave E

9.

1	1	1	0	0	0
0		0	0	2	
0			0	0	2
2					
	1	1	0	2	2
	Q(y)				

$Ay + B = y + 1$

$\Rightarrow\ A = 1 \wedge B = 1$

$\therefore\ A + B = 2$

Clave C

10. Por Horner:

2	8	0	4	a	b	c
−1		−4	0	−12		
0			2	0	6	
−3				−3	0	−9
	4	−2	3	0	0	0

Por dato $R(x) = 0$

Entonces:

$a - 12 - 3 = 0 \Rightarrow a = 15$

$b + 6 = 0 \Rightarrow b = -6$

$c - 9 = 0 \Rightarrow c = 9$

Piden: $a + b + c = 15 - 6 + 9 = 18$

Clave B

11.

2	2	3	−1	m	n
1		1	−1		
−1			2	−2	
				0	0
	1	2	0	0	0

$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

$n + 0 = 0 \Rightarrow n = 0$

$\therefore\ m^n = 1$

Clave B

12.

1	1	1	1	p	q
−2		−2	−1		
−1			2	1	
				−4	−2
	1	−1	2	0	0

$p + 1 - 4 = 0$

$\Rightarrow p = 3$

$q - 2 = 0 \Rightarrow q = 2$

$\therefore\ p + q = 5$

Clave B

13.

1	1	2	−3	−2	−n
2		2	8	10	16
	1	4	5	8	14

$\Rightarrow -n + 16 = 14$

$\therefore n = 2$

Clave A

14. Por Horner:

1	3	−1	2	a	a
−1		−3	3		
1			4	−4	
				−9	9
	3	−4	9	0	k

Dato: residuo es un término independiente, entonces:

$a - 4 - 9 = 0 \Rightarrow a = 13$

$k = a + 9 = 13 + 9 = 22$

Clave C

15. Por Horner:

1	1	0	a	0	b
–1		–1	–1		
–1			1	1	
				–a	–a
	1	–1	a	0	0

$1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$
$b - a = 0 \Rightarrow b = a = 1$

Clave C

16. Por Horner:

1	1	3	2	3	m
–3		–3	–1		
–1			0	0	
				–3 ↓	–1 ↓
	1	0	1	0	0

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Clave D

17. $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

	5	7	0	–3	6
–1	↓	–5	–2	2	1
	5	2	–2	–1	7

Σcoef. $Q(x) = 4$

Clave A

18.

$2x + 1 = 0$	2	3	5	5
$x = -\frac{1}{2}$		–1	–1	–2
: 2	2	2	4	3

$Q(x) = x^2 + x + 2;\ R(x) = 3$

$\therefore\ 1 + 1 + 2 - 3 = 1$

Clave E

19.

	5	0	–3	6	–2
–1	↓	–5	5	–2	–4
	5	–5	2	4	–6

$Q(x) = 5x^3 - 5x^2 + 2x + 4$

Σcoeficientes de:

$Q(x) - R(x)$ es: $6 - (-6) = 12$

Clave E

20.

	3	1	1	–5	b	2
$\frac{2}{3}$	↓	2	2	2	–2	$\frac{2}{3}(b-2)$
	3	3	3	–3	(b – 2)	0
: 3						
	1	1	1	–1	$\frac{(b-2)}{3}$	

$R(x) = 2 + \frac{2}{3}b - \frac{4}{3} = 0$

$\Rightarrow b = -1$

Piden: $\left(\frac{b-2}{3}\right) = -1$

Clave E

21. $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$R = 3(-3)^4 + C(-3)^2 - 1$

$71 = 3^1 . 3^4 + C . 9 - 1$

$71 = 243 + 9C - 1$

$-171 = 9C \Rightarrow C = -19$

Clave E

22. $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$R = (-2+3)^5 - (-2+1)^7 + (-2)^2 + 3(-2) - 5$

$R = 1^5 - (-1)^7 + 4 - 6 - 5$

$R = 1 + 1 + 4 - 6 - 5$

$\therefore\ R = -5$

Clave B

23. Por teorema del resto:

$d(x) = x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$D(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + (n-3)x^{n-2} - 3n + 16$

Reemplazamos el valor de x:

$R(x) = n + n - 1 + n - 3 - 3n + 16 = 12$

Clave B

24. Por teorema del resto:

$d(x;y) = x + y = 0 \Rightarrow x = -y$

$D(x;y) = x^3 + x - y + y^3$

Reemplazamos:

$R(y) = (-y)^3 + (-y) - y + y^3$

$R(y) = -y^3 - y - y + y^3$

$\Rightarrow R(x) = -2y = ay$ (dato)

$a = -2$

Nos piden:

$\sqrt{a^2} = \sqrt{2^2} = 2$

Clave B

25. Por teorema del resto:

$d(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$D(x) = 2^n x^2 + 2^{n+1} . x - 1024$

Reemplazamos el valor de x:

$R(x) = 2^n(2)^2 + 2^{n+1} . 2 - 1024 = 0$

$2^{n+2} + 2^{n+2} = 1024$

$2 \times 2^{n+2} = 2^{10}$

$\Rightarrow 2^{n+2} = 2^9$

$n + 2 = 9 \Rightarrow n = 7$

Nos piden:

$n^2 + 1 = 7^2 + 1 = 50$

Clave D

26. Datos:

$D(x) = 5x^7 + ax^5 + bx^4 + 3x + 2$

$d(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$R(x) = 2$

Sabemos que:

$D(x) = d(x)q(x) + R(x)$

Reemplazamos:

$5x^7 + ax^5 + bx^4 + 3x + 2 = (3x^2 + 2x - 1)q(x) + 2$

Sea: $x = -1$, entonces:

$5(-1)^7 + a(-1)^5 + b(-1)^4 + 3(-1) + 2 = 2$

$-5 - a + b - 3 + 2 = 2$

$\therefore b - a = 8$

Clave D

27. Datos:

$D(x) = 4x^{36} - 2x^{27} - 7x^9 + 11m$

$d(x) = 2x^9 - 3$

$R(x) = 0$

Σcoef. $q(x) = q(1)$

Sabemos que:

$D(x) = d(x)q(x) + R(x)$

$4x^{36} - 2x^{27} - 7x^9 + 11m = (2x^9 - 3)q(x)$

Sea: $x = 1$, entonces:

$4 - 2 - 7 + 11m = -q(1)$

$\Rightarrow q(1) + 11m = 5$

$\therefore$ Σcoef. de $q(x) + 11m$ es: 5

Clave D

Resolución de problemas

28. Por la propiedad fundamental:

$T(x) = \underbrace{(x+3)}_{3.^{er}}\underbrace{(x-7)Q(x)}_{2.^{\circ}} = \underbrace{(x+3)(x-7)}_{}\underbrace{(x+b)}_{1.^{er}}$

$T(x) = x^3 + (b-4)x^2 - (4b+21)x - 21b$

Como carece de término cuadrático:

$b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$

Luego el polinomio será:
$T(x) = (x + 3)(x - 7)(x + 4)$

Nos piden:
$\sum Coef.\ T = T(1) = (1 + 3)(1 - 7)(1 + 4)$
$= -120$

Clave A

29. $\underbrace{F(x)}_{3.^{er}} = \underbrace{(x - 2)(x + 1)(x + b)}_{3.^{er}}$

$= x^3 + (b - 1)x^2 - (b + 2)x - 2b$
$b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$
$F(1) = (1 - 2)(1 + 1)(1 + 1) = -4$

Clave D

Nivel 2 (página 30) Unidad 1

Comunicación matemática

30.

1	1	2	–7	–8	12
3		3	–2		
–2			15	–10	
				18	–12
	1	5	6	0	0

I. 5q : V
II. R(q) = 0 : V
III. $q^2 + 5q + 6$: F

31.

32.

	4	–3	–b	a
$2a^2$	↓	8a	c	e
↑×	4	b	d	f

$8a^2 = 8a \Rightarrow a = 1$
$b = 8a - 3 \Rightarrow b = 8 - 3 = 5$
$c = 2a^2b = 2(1)^2(5) = 10$
$d = c - b = 10 - 5 = 5$
$e = 2a^2d = 2(1)^2(5) = 10$
$f = e + a = 10 + 1 = 11$

Resto: f = 11

Clave D

Razonamiento y demostración

33.

3	6	–1	–1	13	–10
2		4	–10		
–5			2	–5	
				–6	15
	2	1	–3	2	5

R(y)

$2y + 5 = my + n$
$\Rightarrow m = 2 \wedge n = 5$
$\therefore m + n = 7$

Clave E

34.

1	1	–3	–5	–J
		1		
1			–2	
				–7
	1	–2	–7	0

$-J - 7 = 0 \Rightarrow J = -7$

Clave D

35.

3	6	16	25	A	B
–2		–4	–2		
–1			–8	–4	
				–10	–5
	2	4	5	0	0

$B - 5 = 0 \Rightarrow B = 5$
$A - 4 - 10 = 0 \Rightarrow A = 14$
$\therefore A + B = 19$

Clave E

36.

3	6	0	5	–3	A	B
0		0	4			
2			0	0		
				0	6	
					0	–2
	2	0	3	–1	–3	5

$A + 6 = -3 \Rightarrow A = -9$
$B - 2 = 5 \Rightarrow B = 7$
$\therefore A + B = -2$

Clave D

37.

1	1	–4	A	–A
3		3	2	
2			–3	–2
	1	–1	0	K

$A + 2 - 3 = 0 \Rightarrow A = 1$
$-A - 2 = K \Rightarrow K = -3$
$\therefore R(x) + A = K + A = -3 + 1 = -2$

Clave C

38.

1	1	a	b	17	c
–5		–5	7	–3	
7			–5(a – 5)	7(a – 5)	–3(a – 5)
–3			↓	↓	↓
	1	(a – 5)	0	0	0

Luego:
$17 - 3 + 7(a - 5) = 0 \Rightarrow 7(a - 5) = -14$
$a - 5 = -2 \Rightarrow a = 3$
$q(x) = x + (a - 5) = x - 2$

Clave E

39. Por Horner:

2	8	0	4	A	B	C
–1		–4	0	–12		
0			2	0	6	
–3				–3	0	–9
	4	–2	3	3	2	1

Luego:
$A - 12 - 3 = 3 \Rightarrow A = 18$
$B + 6 = 2 \Rightarrow B = -4$
$C - 9 = 1 \Rightarrow C = 10$
Nos piden: $A + B + C = 24$

Clave C

40. $\dfrac{10x^5 + x^4 - 9x^3 + 16x^2 + mx + n}{2x^2 + x - 3}; R(x) = 0$

2	10	1	–9	16	m	n
–1		–5	15			
3			2	–6		
				–4	12	
					–3	9
	5	–2	4	3	0	0

Luego:
$m + 12 - 3 = 0 \Rightarrow m = -9$
$n + 9 = 0 \Rightarrow n = -9$
Nos piden: $mn = (-9)(-9) = 81$

Clave C

41.

1	1	(a + 1)	(a + b)	(b + 1)	a	b
–a		–a	–b			
–b			–a	–b		
				0	0	
					–a	–b
	1	1	0	1	0	0

$\therefore R(x) = 0$

Clave A

42. $x - a = 0 \Rightarrow x = a$

	1	b – a	b – ab	a – ab
a	↓	a	ab	ab
	1	b	b	a

$\therefore\ Q(x) = x^2 + bx + b$

Clave B

43. $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

	3	0	m	0	6
–2	↓	–6	12	–2m – 24	p
	3	–6	m + 12	–2m – 24	6 + p

$3 - 6 + m + 12 - 2m - 24 = 10$

$-15 - m = 10$

$\therefore\ m = -25$

Clave D

44. Por Ruffini:

	1	– a	– 2a	– a^2
a + 3		a + 3	3a + 9	(a + 3)(a + 9)
	1	3	a + 9	7a + 2

Entonces:

$-a^2 + (a + 3)(a + 9) = 7a + 2$

$-a^2 + a^2 + 9a + 3a + 27 = 7a + 2$

$5a = -25$

$\Rightarrow a = -5$

Clave A

45. Aplicamos el teorema del resto:

$d(x) = x - a - 2 = 0 \Rightarrow x = a + 2$

	1	–a	–a	–a^2
a + 2	↓	(a + 2)	(2a + 4)	$a^2 + 6a + 8$
	1	2	(a + 4)	6a + 8

Dato:

$R(x) = 6a + 8 = 5a + 11$

$\therefore a = 3$

Clave C

46. $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$R = 5(-1)^{23} + 8(-1)^{18} - 4(-1)^6 - 7(-1) + 9$

$R = -5 + 8 - 4 + 7 + 9$

$\therefore R = 15$

Clave A

47. Por teorema del resto:

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

Reemplazamos en el dividendo:

$x^{20} + 2x^{12} + x^7 - 3x^3 + 2$

$= (x^2)^{10} + 2(x^2)^6 + (x^2)^3x - 3x^2 \,.\, x + 2$

$= (-1)^{10} + 2(-1)^6 + (-1)^3 \,.\, x - 3(-1)(x) + 2$

$= 1 + 2 - x + 3x + 2$

$= 2x + 5$

Clave D

48. $\dfrac{x^8 - 2x^5 - 3x^4 - 8x^2 - 5x + 10}{x^3 + 2}$

Aplicamos el teorema del resto:

$x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x^3 = -2$

Reemplazamos en el dividendo:

$R(x) = (x^3)^2 . x^2 - 2x^3 . x^2 - 3x^3 . x - 8x^2 - 5x + 10$

$R(x) = 4x^2 - 2 . (-2)x^2 - 3(-2)x - 8x^2 - 5x + 10$

$\Rightarrow R(x) = 4x^2 + 4x^2 + 6x - 8x^2 - 5x + 10$

$\therefore\ R(x) = x + 10$

Clave B

Resolución de problemas

49. $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x + b)$

$P(x) = 10 = (1 - 2)(1 - 3)(1 + b)$

$= (-1)(-2)(1 + b)$

$b = 4$

$P(x) = (-2)(-3)\,4 = 24 = TI$

Clave A

50. $P(x) = (3x - 8)Q(x) + R;\ TI = Q(0) = 7$

$P(0) = (3 . 0 - 8)\,Q(0) + R = 10$

$(-8)(7) + R = 10$

$R = 66$

Clave C

Nivel 3 (página 32) Unidad 1

Comunicación matemática

51. $a = 7;\ b = 2;\ c - 1 + \dfrac{8}{3} = 0 \Rightarrow c = -\dfrac{5}{3}$

Nos piden: $a + b - 3c = 7 + 2 - 3\left(-\dfrac{5}{3}\right)$

$= 14$

Clave B

52. VVF

53. Del esquema:

1	2	c	5	g	h
a		6	d		
4			e	i	
				j	k
	b	10	f	138	230

Se tiene:

$b = 2$

$c + 6 = 10 \Rightarrow c = 4$

$ba = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$4b = d \Rightarrow d = 2(4) = 8$

$e = 10a \Rightarrow e = 10(3) = 30$

$i = 40$

$5 + d + e = f \Rightarrow f = 43$

$af = j\ \Rightarrow\ j = 3(43) = 129$

$4f = k \Rightarrow k = 4(43) = 172$

$h + k = 230 \Rightarrow h = 230 - 172 = 58$

$g + e + j = 138 \Rightarrow g = 138 - 40 - 129 = 31$

Nos piden:

$\sqrt{(b + c + e)} . \sqrt{(a + d + f + g + h)}$

Reemplazamos:

$\sqrt{(2 + 4 + 30)} . \sqrt{(3 + 8 + 43 - 31 + 58)}$

$\therefore (6)(9) = 54$

Clave B

54.

2	8	0	4	m	n	p
–1		–4	0	–12		
0			2	0	6	
–3				–3	0	–9
	4	–2	3	5	–3	7

$p - 9 = 7 \quad \Rightarrow p = 16$

$n + 6 = -3 \quad \Rightarrow n = -9$

$m - 12 - 3 = 5 \ \Rightarrow m = 20$

- $m + n > p$

  $20 - 9 > 16$

  $11 > 16$ ...(F)

- $m = 20 \wedge\ n + p = 7$

  $-9 + 16 = 7$ ...(V)

- $m + 4n + p = 0$

  $20 - 36 + 16 = 0$ ...(V)

Clave C

55.

	A	B	C	D	E	F
–1		1	3	5	7	9
	e	d	c	b	a	0

$A = -1$

$B + 1 = -3 \ \Rightarrow\ B = -4$

$C + 3 = -5 \ \Rightarrow\ C = -8$

$D + 5 = -7 \ \Rightarrow\ D = -12$

$E + 7 = -9 \ \Rightarrow\ E = -16$

$F + 9 = 0 \ \Rightarrow\ F = -9$

$\therefore\ A + B + C + D + E + F = -50$

Clave E

Razonamiento y demostración

56.

1	A	B	–13	–14	24
4		4	–3		
–3			24	–18	
				32	–24
	1	6	8	0	0

$A = 1$

$B + 4 = 6 \Rightarrow B = 2$

$\therefore\ A - B = -1$

Clave B

57.

2	4	0	–17	A	B
–3		–6	4		
2			9	–6	
				6	–4
	2	–3	–2	0	0

$B - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 4$

$A - 6 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$

$\therefore$ A y B son: 0 y 4

Clave A

58.

2	A	B	0	3	–9
–1		–2	+6		
3			0	0	
				–3	9
	2	0	+3	0	0

$\frac{A}{2} = 2 \Rightarrow A = 4$

$\frac{B-2}{2} = 0 \Rightarrow B = 2$

$\therefore \frac{A}{B} = 2$

Clave B

59.

2	4	–16	M	–N
3		6	–4	
–2			–15	10
	2	–5	5	0

$-N + 10 = 0 \quad \Rightarrow N = 10$

$M - 4 - 15 = 5 \quad \Rightarrow M = 24$

$\therefore\ M - N = 14$

Clave B

60.

1	1	–3	0	m + 1	n – 1
2		2	–4		
–4			–2	4	
				–12	24
	1	–1	–6	0	0

$m + 1 + 4 - 12 = 0 \Rightarrow m = 7$

$n - 1 + 24 = 0 \quad \Rightarrow n = -23$

$\therefore\ m - n = 7 + 23 = 30$

Clave E

61. Por Horner:

2	6	–y	$-6y^2$	$5y^3$	$-3y^4$
–y		–3y	$6y^2$		
$2y^2$			$2y^2$	$-4y^3$	
				$-y^3$	$2y^4$
	3	–2y	y^2	0	–16

$2y^4 - 3y^4 = -16 \Rightarrow -y^4 = -16$

$y^4 = 2^4$

$y = 2$

Clave C

62. Por Horner:

3	9	6a	$(a^2 + 3b)$	$9a^2$	– 3ab
–a		–3a	3b		
b			$-a^2$	ab	
				–2ab	$2b^2$
	3	a	2b	0	$(6ab + b^2)$

Luego:

$9a^2 - ab = 0$

$\Rightarrow\ \frac{a}{b} = \frac{1}{9}$

Clave B

63. Por Horner:

1	7	9a	$-6a^2$	0	ma^4	na^5
–a		–7a	$14a^2$			
$2a^2$			$-2a^2$	$4a^3$		
				$-6a^3$	$12a^4$	
					$2a^4$	$-4a^5$
	7	2a	$6a^2$	$-2a^3$	$16a^4$	$-a^5$

Luego:

$m + 12 + 2 = 16$

$\Rightarrow m = 2$

$n - 4 = -1$

$\Rightarrow n = 3$

$\therefore 3m - 2n = 6 - 2(3) = 0$

Clave E

64. $x - a = 0 \Rightarrow x = a$

	2	4a	$-5a^2$	$-3a^3$	ma^4
a	↓	2a	$6a^2$	a^3	$-2a^4$
	2	6a	a^2	$-2a^3$	0

$\Rightarrow\ ma^4 - 2a^4 = 0$

$\therefore\ m = 2$

Clave B

65. $x - a = 0 \Rightarrow x = a$

	1	0	ma^2	$-5a^3$	a^4
a		a	a^2	$4a^3$	$-a^4$
	1	a	p	$-a^3$	0

$ap = 4a^3 \ \Rightarrow p = 4a^2$

$\Rightarrow ma^2 + a^2 = p = 4a^2$

$ma^2 = 3a^2$

$\Rightarrow m = 3$

Clave C

66. Sea $y = x^{2n}$, reemplazamos:

$$\frac{ay^5 - 2y^4 - 2y^2 - y + 3y^3 - 1}{y - 1}$$

Si $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

Entonces:

$a(1)^5 - 2(1)^4 - 2(1)^2 - (1) + 3(1)^3 - 1 = 21$

$a - 2 - 2 - 1 + 3 - 1 = 21$

$\Rightarrow a = 24$

Ordenamos el dividendo y aplicamos Ruffini:

	24	–2	3	–2	–1	–1
1		24	22	25	23	22
	24	22	25	23	22	21

$Q(x) = 24x^4 + 22x^3 + 25x^2 + 23x + 22$

$\Rightarrow Q(1) = 116$

$\therefore \Sigma$ coef. = 116

Clave D

67. Resolución:

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$R = 27(-3)^{83} - 3(-3)^{85} + 4(-3)^2 + 2(-3) - 1$

$R = -3^3 . 3^{83} + 3^1 . 3^{85} + 36 - 6 - 1$

$R = -386 + 386 + 29 \Rightarrow R = 29$

Clave C

68. Por teorema del resto:

$d(x) = x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

$D(x) = x^5 - x^3 + 7$

$D(x) = (x^2)^2x - x^2 . x + 7$

Reemplazamos:

$R(x) = (-1)^2x - (-1)x + 7$

$R(x) = 2x + 7 = ax + b$

$\Rightarrow\ a = 2 \wedge b = 7$

Nos piden: $ab = 14$

Clave E

69. Por el teorema del resto:

$d(x) = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ ...(1)

$D(x) = 2x^3(x+1)^5 + x + 1$

$D(x) = 2x^3(x+1)^3(x+1)^2 + x + 1$

$D(x) = 2(x^2 + x)^3(x^2 + 2x + 1) + x + 1$ ...(2)

Reemplazamos (1) en (2):

$R(x) = 4(x+1)^4 + x + 1$

$R(x) = 4(x^2 + 2x + 1)^2 + x + 1$ ...(3)

Reemplazamos (1) en (3):

$R(x) = 16(x+1)^2 + x + 1$

$R(x) = 16(x^2 + 2x + 1) + (x + 1)$

$R(x) = 33(x + 1)$

Nos piden: $\sum$coef. de R(x)

$\therefore \sum$coef. $R(x) = 33(2) = 66$

Clave E

Resolución de problemas

70. Nos dicen: P(x) es de 4.° grado

$\dfrac{P(x)}{(x-1)^2} \Rightarrow R_1(x) = 5x$ ...(I)

$\dfrac{P(x)}{(x-5)^3} \Rightarrow R_2(x) = 6x$ ...(II)

Según la ec. fundamental en (II):

$P(x) = (x-5)^3\,Q_2(x) + 6x$

$= (x-5)^3\,(ax + b) + 6x$ ...(III)

Ecuación fundamental en (I)

$P(x) = (x-1)^2\,Q_1(x) + 5x$ ...(IV)

Igualamos (III) y (IV):

$(x-5)^3\,(ax+b) + 6x \equiv (x-1)^2\,Q_1(x) + 5x$

Operamos y agrupamos:

$ax^4 + (b - 15a)x^3 + (75a - 15b)x^2 + (75b - 125a + 1) - x - 125b = (x-1)^2\,Q_1(x)$

Como es divisible por $(x-1)^2 \Rightarrow$ será

x − 1 = 0	a	b − 15a	75a − 15b	75b − 125a + 1	−125b
x = 1		a	b − 14a	61a − 14b	61b − 64a + 1
	a	b − 14a	61a − 14b	61b − 64a + 1	−64b − 64a + 1 = 0
1		a	b − 13a	48a − 13b	
	a	b − 13a	48a − 13b	48b − 16a + 1 = 0	

Del esquema:

$-64b - 64a + 1 = 0$

$48b - 16a + 1 = 0$

$a = \dfrac{7}{256};\ b = -\dfrac{3}{256}$

"a y b" en (III): $P(x) = \dfrac{1}{256}(x-5)^3\,(7x - 3) + 6x$

Clave C

71. $P(x) = (x^2 - x + 1)\,(x^2 + x + 1)k$

$\underbrace{P(x)}_{4.°\ grado} = \underbrace{(x^2 - x + 1)\,(x^2 + x + 1)}_{4.°\ grado}k$

$P(x) = (x + 1)\,Q(x) + 24$

$x = -1 \Rightarrow ((-1)^2 - (-1) + 1)((-1)^2 + (-1) + 1)k = 24$

$\Rightarrow\ k = 8$

$P(1) = (1^2 - 1 + 1)(1^2 + 1 + 1)\,8 = 3(8) = 24$

Clave C

MARATÓN MATEMÁTICA (página 34)

1.

I. Correcto
II. Correcto
III. Correcto
IV. Incorrecto
V. Correcto (trinomio cuadrado)
VI. Correcto (diferencia de cuadrados)

Clave B

2. Utilizamos la identidad de Legendre:

$(2x + 8)^2 - (2x - 8)^2 = 4(2x)8 = 2^6x = 64x$

Clave E

3. $(a + 6)(a - 6)(a^2 + 36) + 6^4$

$(a^2 - 36)(a^2 + 36) + 6^4$

$a^4 - 36^2 + 6^4$

$a^4 - (6^2)^2 + 6^4$

$a^4 - 6^4 + 6^4 = a^4$

Clave B

4. $R = \sqrt{\dfrac{4xy}{xy}} = \sqrt{4} = 2$

Clave C

5. $P(x) = x^3 + 2x + 3$

Evaluamos:

$\Rightarrow P(1) = 1^3 + 2(1) + 3 = 6$

$\Rightarrow P(P(1)) = P(6) = 6^3 + 2(6) + 3 = 231$

Clave E

6. Si $x = 2$ $P(x - 1)/3 = P(1/3)$

$\Rightarrow P(1/3) = 3(2) + 4 = 10$

Clave A

7. Como el polinomio es homogéneo los grados de sus términos son iguales

$\Rightarrow 4m - 1 = 2m + 7$

$m = 4$

$\Rightarrow n - 8 = 4(4) - 1$

$n = 23$

$\therefore \frac{n}{m} = \frac{23}{4}$

Clave D

8. Del dato $m^3 - n^3 = 9$

$\underbrace{(m - n)}_{\text{(dato)}}(m^2 + mn + n^2) = 9$

$m^2 + mn + n^2 = 3 \quad \ldots \text{(I)}$

De: $m - n = 3$

$m^2 - 2mn + n^2 = 9 \quad \ldots \text{(II)}$

(I) − (II) $\Rightarrow \quad 3mn = -6$

$mn = -2$

Clave C

9. $P(x) = 3x^2 - ax^{a-3} - 2$

grado: 2, 1, 0

$\Rightarrow a - 3 = 1$

$a = 4$

$P(x) = 3x^2 - 4x - 2$

$P(-1) = 3 + 4 - 2 = 5$

Clave B

10. Si GA (P) = 20 $\Rightarrow m + n + 4 = 20$

Si GR(x) = 12 $\Rightarrow m + 5 = 12$

$m = 7$

Luego: $m + n + 4 = 20$

$\downarrow$

7

$\Rightarrow n = 9$

Clave B

11. $a^{x-4-(2-x)} = a^{7-(-3)}$

$a^{2x-6} = a^{10} \Rightarrow 2x - 6 = 10$

$x = 8$

Clave D

12. $16^{\frac{4-x}{4}} = 32^{\frac{1}{3}}$

$(2^4)^{\frac{(4-x)}{4}} = (2^5)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 4 - x = \frac{5}{3}$

$x = \frac{7}{3}$

Clave C

13. Del dato: $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$

Elevando al cuadrado $\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$

Nuevamente al cuadrado $\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 98$

ClaveA

14. Aplicando Ruffini queda $(x + 1)(x^2 + x - 1)$

	1	2	0	−1
−1		−1	−1	1
	1	1	−1	0

$\Rightarrow P(x) = (x + 1)(x^2 + x - 1)$

F P F P

Clave A

15. Si la división es exacta, dividimos por el método de Horner:

2	6	16	25	N	M
−4		−12	−15		
−5			−8	−10	
				−4	−5
	3	2	1	N − 14	M − 5

$\underbrace{N - 14}_{0}$ $\underbrace{M - 5}_{0}$ por ser división exacta

$\Rightarrow S = 3 + 2 + 1 = 6$

$N = 14$

$M = 5$

$M + N + S = 6 + 14 + 5 = 25$

Clave B

Unidad 2

COCIENTES NOTABLES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 39) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. $\left(\frac{x^{3n}-1}{x^n-1}\right)-\left(\frac{x^{2n}-1}{x^n+1}\right)$

$\frac{(x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)}{x^n-1}-\frac{(x^n-1)(x^n+1)}{x^n+1}$

$x^{2n}+x^n+1-(x^n-1)$

$\therefore \frac{x^{3n}}{x^n-1}-\frac{x^{2n}}{x^n+1}-\frac{1}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1}=x^{2n}+2$

Clave D

4. $(x^4)^8+(x^4)^7+(x^4)^6+...+(x^4)^1+1$

$=\frac{(x^4)^9-1}{x^4-1}=\frac{x^{36}-1}{x^4-1}$

Clave C

5.

$\frac{(x^2)^{\frac{m}{2}}-(y^3)^{\frac{m}{2}}}{x^2-y^3}=(x^2)^{\frac{m}{2}-1}+\underbrace{(x^2)^{\frac{m}{2}-2}(y^3)}_{2.\text{° término}}+...$

$x^{m-4}y^3=x^2y^3 \Rightarrow x^{m-4}=x^2 \Rightarrow m-4=2$

$\Rightarrow m=6$

$\therefore \frac{m}{2}=3$

Clave C

6. $\frac{(4x)^4-y^4}{4x-y}=(4x)^3+(4x)^2y+(4x)y^2+y^3$

$=64x^3+16x^2y+4xy^2+y^3$

Coef: 64 16 4 1

$\sum$coef. $=64+16+4+1=85$

$\therefore \sum$coef. $=85$

Clave E

7. $\frac{(8m^2+1)^4-(2n^3)^4}{(8m^2+1)+2n^3}=(8m^2+1)^3$

$-(8m^2+1)^2(2n^3)+(8m^2+1)(2n^3)^2-(2n^3)^3$

$=(8m^2+1)^3-2n^3(8m^2+1)^2+\underbrace{4n^6(8m^2+1)}_{3.^{er}\text{ término}}-8n^9$

$\therefore 3.^{er}$ término $=4n^6(8m^2+1)$

Clave C

8. $(9^2)^9-(9^2)^8+(9^2)^7-...+(9^2)^1-1$

$=\frac{(9^2)^{10}-1^{10}}{9^2+1}=\frac{9^{20}-1}{82}$

Clave A

Resolución de problemas

9. $\frac{x^{35}-128}{x^5-2}=\frac{(x^5)^7-2^7}{x^5-2}$

$=(x^5)^6+(x^5)^5 2+(x^5)^4 2^2+(x^5)^3 2^3+(x^5)^2 2^4$

$+(x^5)2^5+2^6$

$=x^{30}+2x^{25}+4x^{20}+8x^{15}+16x^{10}+32x^5+64$

$\sum$ exponentes de x:

$30+25+20+15+10+5=105$

Clave E

10. $t_5=(x^2)^{n-5}a^{5-1}=(x^2)^{n-5}a^4$

Por dato:

$n-5=4(4) \Rightarrow n=21$ (impar)

Luego:

$\frac{(x^2)^{21}+a^{21}}{x^2+a}=\frac{x^{42}+a^{21}}{x^2+a}$

Clave A

Nivel 2 (página 40) Unidad 2

Comunicación matemática

11.

12.

Razonamiento y demostración

13. $t_{16}=(x^2)^{n-16}(y^5)^{16-1}$

$t_{16}=x^{2(n-16)}y^{75}=x^{10}y^{75}$

$\Rightarrow 2(n-16)=10$

$n-16=5$

$\Rightarrow n=21$

$\frac{a}{2}=\frac{b}{5}=21$

$\Rightarrow a=42 \wedge b=105$

$\sqrt{b-a+1}=\sqrt{105-42+1}=\sqrt{64}$

$\therefore \sqrt{b-a+1}=8$

Clave C

14. $\frac{5n+1}{3}=\frac{5n+8}{4}$

$20n+4=15n+24$

$5n=20$

$\Rightarrow n=4$

n.° términos $=\frac{5n+1}{3}=7$

$t_4=-(x^3)^{7-4}(y^4)^{4-1}$

$t_4=-x^9y^{12}$

$\therefore t_4=-(\sqrt[3]{2})^9(\sqrt[4]{3})^{12}$

$=-2^3\,3^3$

$=-216$

Clave D

15. $\frac{m+1}{1}=\frac{5m+5}{5}=$ n.° términos $=m+1$

$t_{m-1}=x^{m+1-(m-1)}(y^5)^{m-1-1}$ antepenúltimo término

$=x^2(y^5)^{m-2}=x^2y^{30}$

$\Rightarrow y^{5m-10}=y^{30}\quad \therefore m=8$

Clave D

16. n.° términos $=\frac{3}{\frac{1}{2}}=\frac{12}{2}=6$

$t_2=-(\sqrt{x})^{6-2}(y^2)^{2-1}$

$t_2=-(\sqrt{x})^4y^2$

$\therefore t_2=-x^2y^2$

Clave B

17. $\frac{(x^5)^7-2^7}{x^5-2}$

n.° términos $=\frac{35}{5}=\frac{7}{1}=7$

$t_4=(x^5)^{7-4}(2)^{4-1}$

$t_4=(x^5)^3\,2^3=x^{15}\,.\,8$

$\therefore$ Grado de t_4 es: 15

Clave D

18. $t_5=(x^4)^{n-5}(y^5)^{5-1}=x^{4(n-5)}y^{20}$

$\Rightarrow 4(n-5)+20=32$

$4(n-5)=12$

$n-5=3$

$\therefore n=8$

Clave E

19. $t_3=(x^2)^{n-3}(y)^{3-1}=x^{2(n-3)}y^2=x^{36}y^2$

$\Rightarrow 2(n-3)=36$

$n=21$

$\therefore t_5=(x^2)^{21-5}(y)^{5-1}=x^{32}y^4$

Clave C

20. n.° términos $=7$

$t_4=(\sqrt[3]{4})^{7-4}(\sqrt[3]{3})^{4-1}$

$=4\,.\,3$

$\Rightarrow t_4=12$

Clave B

21. Sea k el término que tiene por grado 45.

n.° términos $=\frac{36}{2}=\frac{54}{3}=18$

$\Rightarrow t_k=(x^2)^{18-k}(m^3)^{k-1}$

$=x^{2(18-k)}m^{3(k-1)}$

Por dato:

$2(18-k)+3(k-1)=45$

$36-2k+3k-3=45$

$k+33=45\quad \therefore k=12$

Clave C

Resolución de problemas

22. $t_{40} = (x^n)^{p-40}(y)^{39}$

$np - 40n + 39 = 87$

$np - 40n = 48$ ...(I)

$t_{41} = (x^n)^{p-41}y^{40}$

$np - 41n + 40 = 84$

$np - 41n = 44$ ...(II)

De (I) y (II): $n = 4 \wedge p = 52$

Clave C

23. $t_k = +(x^a)^{n-k}(y^b)^{k-1} \Rightarrow \dfrac{(x^a)^n - (y^b)^n}{x^a - y^b}$

$t_k = (x^a)^{n-k}(y^b)^{k-1} = x^9y$

$\Rightarrow x^{a(n-k)}y^{b(k-1)} = x^9y$ ...(1)

$t_{k+2} = (x^a)^{n-(k+2)}(y^b)^{k+2-1} = x^3y^3$

$\Rightarrow x^{a(n-k-2)}y^{b(k+1)} = x^3y^3$ ...(2)

Dividiendo (1) entre (2):

$x^6y^{-2} = x^{2a}y^{-2b} \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$
$-2b = -2 \Rightarrow b = 1$

En (1) :

$x^9y = x^{3(n-k)}y^{k-1}$

$k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2$

$3(n-2) = 9 \Rightarrow n = 5$

Luego: $\dfrac{(x^a)^n - (y^b)^n}{x^a - y^b} = \dfrac{(x^3)^5 - y^5}{x^3 - y} = \dfrac{x^{15} - y^5}{x^3 - y}$

Clave B

Nivel 3 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

24.

I. n.° términos $= \dfrac{35}{5} = \dfrac{49}{7} = 7$

$\Rightarrow$ Posee término central ...(C)

II. $t_4 = (x^5)^{7-4}(y^7)^{4-1}$

$t_4 = x^{15}y^{21}$

$\Rightarrow$ GR (x) = 15 ...(C)

III. GR (y) = 7 = n.° términos ...(C)

Razonamiento y demostración

25. $\dfrac{(x+1)^3 - 1}{(x+1)^{\frac{1}{6}} - 1} = \dfrac{\left((x+1)^{\frac{1}{6}}\right)^{18} - 1^{18}}{(x+1)^{\frac{1}{6}} - 1}$

n.° términos $= \dfrac{3}{\frac{1}{6}} = \dfrac{18}{1} = 18$

$t_6 = \left((x+1)^{\frac{1}{6}}\right)^{18-6} . 1^{6-1}$

$\Rightarrow t_6 = (x+1)^2$

Clave C

26. Sea: $t_k = (x^3)^{n-k}(y^7)^{k-1} = x^c . y^{231}$

$\Rightarrow 7(k-1) = 231$

$k = 34$

$\dfrac{n+1}{2} = 34 \Rightarrow n = 67$

$3(n-k) = c$

$3(67 - 34) = c \Rightarrow c = 99$

$\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{7} = n = 67$

$\Rightarrow a = 201; b = 469$

$\therefore a + b + c = 769$

Clave C

27. $\dfrac{m^2 + 7}{2} = \dfrac{m + 13}{2}$

$m^2 - m - 6 = 0$

m ╲╱ -3
m ╱╲ $+2$

$m - 3 = 0 \vee m + 2 = 0$

$\Rightarrow m = 3 \vee m = -2$

Clave E

28. Sea p el número de términos:

$t_{17} = (x^5)^{p-17}(y^7)^{16} = x^{115}y^{112}$

$\Rightarrow (x)^{5(p-17)} = x^{115}$

$5(p-17) = 115 \Rightarrow p = 40$

$\dfrac{m}{5} = \dfrac{n}{7} = 40 =$ n.° términos

$\Rightarrow m = 200 \wedge n = 280$

$\therefore n - m = 80$

Clave A

29. $\dfrac{81^{5n}}{3^{13n}} = \dfrac{(3^4)^{5n}}{3^{13n}} = \dfrac{3^{20n}}{3^{13n}} = 3^{7n} \in \mathbb{Z}$

Es un cociente notable, entonces R = 0.

Clave C

30. $\dfrac{3k+1}{2} = \dfrac{9k-5}{5}$

$15k + 5 = 18k - 10$

$\Rightarrow k = 5$

n.° términos $= \dfrac{3k+1}{2} = 8$

$t_6 = -(x^2)^{8-6}(y^5)^{6-1} = -x^4y^{25}$

Por dato:

$-x^{a^2}y^{b^2} = -x^4y^{25}$

$\Rightarrow a = 2 \wedge b = 5$

$\therefore a . b = 10$

Clave A

Resolución de problemas

31. Sea p el número de términos.

$t_{10} = (x^2)^{10-1} . (x^{-3})^{p-10}$

$t_{10} = x^{18} . x^{-3(p-10)} = x^{48-3p}$

Por ser el t_{10} independiente de x:

$\Rightarrow 48 - 3p = 0 \Rightarrow p = 16$

$\therefore \underbrace{t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_6}_{\text{términos racionales enteros}} \ldots \underbrace{t_7 \ldots t_{16}}_{10}$

$\therefore$ Hay 6 términos racionales.

Clave C

32. n.° términos $= \dfrac{21}{3} = \dfrac{14}{2} = 7$

$t_5 = [(2x)^3]^{7-5}(m^2)^{5-1}$

$t_5 = (2x)^6m^8 = 2^6x^6m^8$

$\therefore t_5 = 64x^6m^8$

Clave E

33. Dando forma

$\dfrac{(x^{3m})^{43}(a^{2n})^{43}}{(x^{3m}) - (a^{2n})}$

Como: $t_k = +(x^{3m})^{p-k} . (a^{2n})^{k-1}$

$t_{25} = +(x^{3m})^{43-25} . (a^{2n})^{25-1} = x^{54m} . a^{48n}$

Dato: $x^{54m} . a^{48n} = x^{270} . a^{288}$

Comparando:

$54m = 270 \Rightarrow m = 5$

$48n = 288 \Rightarrow n = 6$

$\therefore m + n = 11$

Clave B

34. Formando cocientes notables:

$L = \dfrac{\dfrac{x^{82} - 1}{x^2 - 1}}{\dfrac{x^{41} + 1}{x + 1}} \cdot (x - 1)$

$L = \dfrac{(x^{82} - 1)(x + 1)(x - 1)}{(x^{41} + 1) - (x^2 - 1)}$

$L = \dfrac{(x^{41} + 1)(x^{41} - 1)}{(x^{41} + 1)}$

$\therefore L = x^{41} - 1$

Clave D

FACTORIZACIÓN

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 44) Unidad 2

Comunicación matemática

1. $27x^2 - 3x - 14$

$9x \quad -7 \quad -21x$
$3x \quad 2 \quad 18x$
$\qquad\qquad -3x$

$a = 3 \ \wedge \ b = -7$

$a^2 + b^2 = (3)^2 + (-7)^2$
$= 9 + 49 = 58$

2.

Clave E

Razonamiento y demostración

3. $P(a; b; c) = 2a^3bc - 18ab^3c$
$= 2abc(a^2 - 9b^2)$
$= 2abc(a + 3b)(a - 3b)$

Σ factores primos:
$= a + b + c + a + 3b + a - 3b$
$= 3a + b + c$

Clave B

4. $P(x; y) = x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy$
$= xy(xy + x + y + 1)$
$= xy(x(y + 1) + (y + 1))$
$= xy(x + 1)(y + 1)$

$\therefore$ Factores primos = 4

Clave C

5. $2xz - y^2 + x^2 + z^2 = (x + z)^2 - y^2$
$= (x + z + y)(x + z - y)$

$\therefore \ \Sigma$factores primos $= x + z + y + x + z - y$
$= 2x + 2z$

Clave D

6. $Q(x) = 6x^2 - x - 15$

$3x \quad -5$
$2x \quad 3$

$= (3x - 5)(2x + 3)$

$\therefore \ \Sigma$ factores primos: $3x - 5 + 2x + 3 = 5x - 2$

Clave D

7. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$x^2 \quad -4$
$x^2 \quad -1$

$P(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$
$P(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$

$\therefore$ El n.º de factores primos es 4.

Clave A

8. $P(a; b; c) = a^3b - 4a^2b + ac - 4c$
$= a^2b(a - 4) + c(a - 4)$
$= (a - 4)(a^2b + c)$

$\therefore$ Uno de sus factores es $a^2b + c$

Clave D

Resolución de problemas

9. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

$x \quad 3$
$x \quad -2$

Nos piden: $(4)(-1) = -4$

Clave E

10. $B(a; b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab\,(a + b)$
$= (a + b)(a^2 - ab + b^2 - ab)$
$= (a + b)(a^2 - 2ab + b^2)$
$= (a + b)(a - b)^2$

Nos piden:
$(a + b + a - b)^2 = (2a)^2 = 4a^2$

Clave A

Nivel 2 (página 44) Unidad 2

Comunicación matemática

11.

I. (V)

$x^7 + y^7 = (x + y)\,(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$

II. (V)

$x^7 - y^7 = (x - y)(xy + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6)$

III. (F)

$[(x + z) + y]\,[(x + z) - y] - (x^2 - y^2)$
$(x + z)^2 - y^2 - x^2 + y^2$
$(x + z)^2 - x^2$
$(x + z + x)\,(x + z - x)$
$(2x + z)z$

12. $R(x) = y(x - 1)(x^2 + x + 1)$; FFF

Razonamiento y demostración

13. $B(x; y) = (a + b)\,x - (a + b)y - a - b$
$B(x; y) = (a + b)(x - y) - (a + b)$
$B(x; y) = (a + b)(x - y - 1)$

$\therefore$ Un factor es $(x - y - 1)$

Clave D

14. $P(a) = a^2 - ab - b - 1$

Agrupamos:
$P(a) = a^2 - 1 - ab - b$
$= (a + 1)(a - 1) - b(a + 1)$
$= (a + 1)(a - 1 - b)$

$\therefore$ Un factor primo es $a + 1$

Clave A

15. $Q(a; b) = a^2b^2 + 2ab^2 + b^2$
$Q(a; b) = b^2\underbrace{(a^2 + 2a + 1)}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$

$Q(a; b) = b^2(a + 1)^2$
$Q(a; b) = b^2(a + 1)(a + 1)$

Clave D

16. $P(x; y) = 10x^4 + 7x^2y^2 - 12y^4$

$5x^2 \quad -4y^2$
$2x^2 \quad 3y^2$

$P(x; y) = (5x^2 - 4y^2)(2x^2 + 3y^2)$

Clave B

17. Agrupamos convenientemente:
$P(x) = x^3 + x^2 - (x + 1)$
$P(x) = x^2(x + 1) - (x + 1)$
$P(x) = (x + 1)(x^2 - 1)$ (Diferencia de cuadrados)
$P(x) = (x + 1)(x + 1)(x - 1)$
$\therefore \ P(x) = (x + 1)^2(x - 1)$

Clave A

18. $P(a; b) = ab^2 + ac^2 + bc^2 + a^2b$

Agrupando términos:
$ab^2 + a^2b + ac^2 + bc^2$
$ab(b + a) + c^2(a + b)$
$\Rightarrow P(a; b) = (a + b)(ab + c^2)$

$\therefore$ Factores primos $(a + b)$; $(ab + c^2)$

Clave E

Resolución de problemas

19. $A(m; n) = (2m + n + 1 + 2n + m - 1)(2m + n + 1 - 2n - m + 1)$
$= 3(m + n)(m - n + 2)$

$\therefore$ TI = 2

Clave B

20. $E(a, b) = a^3b^4 - a^2b^3 - a^2b^5 + ab^4$
$E(a, b) = ab^3(a^2b - a - ab^2 + b)$
$E(a, b) = ab^3(a - b)(ab - 1)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad$ TI

Nos piden: $(-1)^2 = 1$

Clave A

Nivel 3 (página 45) Unidad 2

Comunicación matemática

21. El paso incorrecto realizado es el V.

Clave E

22. Factorizando "6" en los dos últimos términos:
$T = 4(x + 8)^2 - (x + 6)^2 + 6(x + \boxed{10})$

Haciendo el siguiente cambio de variable:
$x + 7 = a$

$T = 4\,[(x + 7) + 1)^2 - [(x + 7) - 1)^2 + 6[(x + 7) + \boxed{3}\,]$

$T = 4\,(\boxed{a} + 1)^2 - (\boxed{a} - 1)^2 + 6\,(\boxed{a} + \boxed{3})$

Operando los binomios al cuadrado y aplicando la propiedad distributiva en el último factor:

$T = 4(\boxed{a}^2 + 2\boxed{a} + 1) - (\boxed{a}^2 - 2\boxed{a} + 1) + 6\boxed{a} + 6\boxed{3}$

Operando produciendo términos semejantes:

$T = 4\boxed{a}^2 + 8\boxed{a} + 4 - \boxed{a}^2 + 2\boxed{a} - 1\boxed{a} + 6\boxed{a} + 6\boxed{3}$

Agrupando convenientemente:

$T = (4\boxed{a}^2 - \boxed{a}^2) + (8\boxed{a} + 2\boxed{a} + 6\boxed{a} + (4 - 1 + 6\boxed{3})$

$T = 3\boxed{a}^2 + (8 + 2 + 6)\boxed{a} + \boxed{21}$

$T = (3\boxed{a}^2 + 7\boxed{a}) + (9\boxed{a} + \boxed{21})$

Factorizando $\boxed{a}$ y 3 en el 1.° y 2.° parentesis, respectivamente.

$T = \boxed{a}(3\boxed{a} + 7) + 3(3\boxed{a} + \boxed{7})$

$T = (\boxed{a} + \boxed{3})\,(3\boxed{a} + \boxed{7})$

Reponiendo el cambio de variable:

$T = (x + \boxed{10})\,(\boxed{3}x + \boxed{28})$

Razonamiento y demostración

23. $F(x) = 8x^3 - 24x^2 + 18x$

$= 2x(\underbrace{4x^2 - 12x + 9})$

$F(x) = 2x(2x - 3)^2$

$\therefore$ Número de factores primos: 2

Clave B

24. $(a^4 - b^4)(a^4 + b^4)$

$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

$\therefore$ Tiene 4 factores primos.

Clave D

25. $(2xz - 1)^2 - (x + 2z)^2 + 8xz$

$4x^2z^2 - 4xz + 1 - x^2 - 4z^2 - 4xz + 8xz$

$4z^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(4z^2 - 1)$

$(x + 1)(x - 1)(2z + 1)(2z - 1) = 0$

$\therefore$ La $\sum$ de factores primos es: $2x + 4z$

Clave E

26. $7x^2 - 41x - 6 = (7x + 1)(x - 6)$

$7x \quad +1$

$x \quad -6$

$\Rightarrow (7x + 1) = (mx + 1)$

$7x = mx$

$\therefore\ m = 7$

Clave C

27. $[(4x + y) - (x + 3y)]\,[(4x + y) + (x + 3y)]$

$(4x + y - x - 3y)(5x + 4y)$

$(3x - 2y)(5x + 4y)$

$\therefore$ $5x + 4y$ es un factor primo.

Clave B

28. $P(a; b) = a^7b^5 - a^3b^9$

$= a^3b^5(\underbrace{a^4 - b^4})$

$= a^3b^5(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

$\therefore$ Tiene 5 factores primos.

Clave B

Resolución de problemas

29. $C(a; b) = 27a^6 - 728a^3b^3 - 27b^6$

$27a^3 \quad +b^3 \qquad a^3b^3$

$a^3 \quad -27b^3 \qquad -729a^3b^3$

$\qquad\qquad -728a^3b^3$

$C(a; b) = [(3a)^3 + b^3]\,[a^3 - (3b)^3]$

$C(a; b) = \underbrace{(3a + b)}_{4}\,\underbrace{(9a^2 - 3ab + b^2)}_{7}\underbrace{(a - 3b)}_{-2}$

$\sum$coef. 4 7 −2

$\underbrace{(a^2 + 3ab + 9b^2)}_{13}$

$\therefore$ Factor primo de menor suma de coef.: $a - 3b$

Clave B

30. $B(m; n; p) = m^2n - mn^2 - m^2p + mp^2 + n^2p - np^2$

$B(m;n;p) = (m^2n - mn^2) + (n^2p - m^2p) + (mp^2 - np^2)$

$= mn(m - n) - (m^2p - n^2p) + (mp^2 - np^2)$

$= mn(m - n) - p(m + n)(m - n) + p^2(m - n)$

$= (m - n)(mn - p(m + n) + p^2)$

$= (m - n)(nm - pm - pn + p^2)$

$= (m - n)((mn - pn) - (pm - p^2))$

$= (m - n)(n(m - p) - p(m - p))$

$= \underset{1.°}{(m - n)}\underset{2.°}{(m - p)}\underset{3.°}{(n - p)}$

$\therefore$ Tiene 3 factores lineales.

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 48) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

$$Z = \frac{\begin{array}{l} x^2 + 2x - 63 \\ x \quad\; \boxed{9} \\ x \quad\; \boxed{-7} \end{array}}{\begin{array}{l} x^2 - 2x - 35 \\ x \quad\; \boxed{5} \\ x \quad\; \boxed{-7} \end{array}} = \frac{(x + \boxed{9})(x + \boxed{-7})}{(x + \boxed{5})(x + \boxed{-7})}$$

$$\therefore\ Z = \frac{x + \boxed{9}}{x + \boxed{5}}$$

2.

I. $MCD(T;W) = b^7c^{10}$ (F)

II. $A(\alpha) = (\alpha + 1)^7(\alpha^3 - 3)$

$B(\alpha) = (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1)$

$MCM(A;B) = \underbrace{(\alpha + 1)^7}_{7}\underbrace{(\alpha^3 - 3)}_{3}\underbrace{(\alpha^2 - \alpha + 1)}_{2} \Rightarrow 12$

(V)

III. $M(t) = (t^2 - 27)(t^2 + 1)$

$N(t) = (t + 1)(t - 1)(t^2 + 1)$

$MCD(M;N) = t^2 + 1$ (F)

Solo II es la proposición verdadera.

Clave D

Razonamiento y demostración

3. $\dfrac{x : x^2}{x^3 : x^4} : \dfrac{x^5 : x^6}{x^7 : x^8} = \dfrac{x^{-1}}{x^{-1}} : \dfrac{x^{-1}}{x^{-1}} = 1 : 1 = 1$

Clave D

4. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \dfrac{(x - 3)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{x - 3}{x + 2}$

Clave A

5. $\dfrac{a^{10} + a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1}{a^4 + a^2 + 1} = \dfrac{a^6(a^4 + a^2 + 1) + (a^4 + a^2 + 1)}{a^4 + a^2 + 1}$

$= \dfrac{(a^4 + a^2 + 1)(a^6 + 1)}{a^4 + a^2 + 1} = a^6 + 1$

Clave B

6. $\dfrac{a}{b}\left(a : \dfrac{b}{c} - b : \dfrac{a}{c}\right) : \dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{b}\left[a . \dfrac{c}{b} - b . \dfrac{c}{a}\right]\dfrac{b}{c}$

$= \dfrac{a}{b} . c\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)\dfrac{b}{c} = \dfrac{a(a^2 - b^2)}{ab} = \dfrac{a^2 - b^2}{b}$

Clave B

7. Efectuando la expresión E:

$E = \dfrac{a^2 - b^2}{ab} - \dfrac{b(a - b)}{a(b - a)}$

$E = \dfrac{a^2 - b^2}{ab} + \dfrac{b(a - b)}{a(a - b)} = \dfrac{a^2 - b^2}{ab} + \dfrac{b}{a}$

$E = \dfrac{a^2 - b^2 + b^2}{ab} = \dfrac{a^2}{ab} = \dfrac{a}{b}$

Clave A

8. Efectuando la expresión M:

$M = \dfrac{(1 + x)^2 + (1 - x)^2}{(1 + x)^2 - (1 - x)^2} . \left(\dfrac{2x^2}{x^2 + 1}\right)$

Por productos notables:

$M = \dfrac{2(1 + x^2)}{4(1)(x)} . \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$

$\therefore M = x$

Clave C

9. $\dfrac{(x^6 - 1)(x + 1)}{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)} = \dfrac{(x^6 - 1)(x + 1)}{x^6 - 1} = x + 1$

Clave A

10. $S = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

Factorizando se tiene:

$S = \dfrac{(x - 3)(x - 2)}{(x + 4)(x - 2)} = \dfrac{x - 3}{x + 4}$

Clave A

11.

$E = \dfrac{(x^3 + 1)x}{x(x^2 + 1 - x)}$

$E = \dfrac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)}$

$\therefore E = x + 1$

Clave D

Resolución de problemas

12.

$E = \dfrac{(x + 4)(x + 3)}{(x + 4)(x - 2)} = \dfrac{x + 3}{x - 2}$ $\qquad \therefore E = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

Clave B

13. $A(x) = 2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$

$$\begin{array}{ll} 2x & 1 \\ x & -1 \end{array}$$

$B(x) = 2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$

$$\begin{array}{ll} 2x & 1 \\ x & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ El factor común o MCD es: $(2x + 1)$

$(2x + 1) = (mx + 1) \therefore m = 2;\ m^2 = 4$

Clave C

14. Los factores comunes son:

$3x - 1; x - 1; (3x - 1)(x - 1); (3x - 1)(x - 1)^2$; de ellos el de mayor grado es: $(3x - 1)(x - 1)^2$

$\therefore MCD(P(x); Q(x)) = (3x - 1)(x - 1)^2$

Clave D

Nivel 2 (página 49) Unidad 2

Comunicación matemática

15.

E S | A Q U E L L A | E X P R E S I Ó N | D E

5 1 21 1 24 16 5 15 5

M A Y O R | G R A D O | P O S I B L E

13 25 18 15 15 19 5

C O N T E N I D A | C O M O | F A C T O R

3 14 20 14 1 15 15 6 20 18

U N | N U M E R O | E N T E R O | D E

21 21 13 18 5 5 15 5

V E C E S | E N | D O S | O | M Á S

5 5 14 15 15 1

E X P R E S I O N E S | A L G E B R A I C A S

24 5 15 5 1 5 2 9 1

Este concepto se refiere al : MCD

16. El MCD de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de mayor grado posible contenida como factor, un número entero de veces en dichas expresiones.

Razonamiento y demostración

17. $S = \dfrac{x^3 - a^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \dfrac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

$S = \dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})(x^2+ax+a^2)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

$S = (\sqrt{x}+\sqrt{a})(x^2+ax+a^2)$

Si: $x = a$

$S = (\sqrt{a}+\sqrt{a})(a^2+a^2+a^2)$

$S = (2\sqrt{a})(3a^2) = 6a^2\sqrt{a}$

Clave B

18. $S(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x} - \dfrac{(x+1)^2}{x} + \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} + x + 5$

$S(x) = \dfrac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x} + \dfrac{(x-1)^2}{x-1} + x + 5$

$S(x) = \dfrac{-4x}{x} + (x-1) + x + 5$

$\therefore S(x) = -4 + x - 1 + x + 5 = 2x$

Clave A

19. $\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1} + \dfrac{x^3-1}{x^2+x+1} = \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$

$= x + 1 + x - 1 = 2x$

Clave B

20. Del enunciado tenemos:

$M = \left[\dfrac{(x+2)(x+4)-(x-5)(x-1)}{x^2+3x-4}\right](x^2+3x-4)$

$\Rightarrow M = x^2 + 6x + 8 - (x^2 - 6x + 5)$

$\therefore M = 12x + 3$

Clave A

21. $E = \left(\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{x^2-1}\right)\left(\dfrac{x^2-1}{2(x^2+1)}\right)$

$E = \dfrac{2(x^2+1)}{2(x^2+1)} \quad \therefore E = 1$

Clave D

22. $K = \dfrac{x}{a^2-ax} + \dfrac{a+x}{ax} + \dfrac{a}{ax-x^2}$

$K = \dfrac{x}{a(a-x)} + \dfrac{a+x}{ax} + \dfrac{a}{x(a-x)}$

Luego:

$K = \dfrac{x^2+(a+x)(a-x)+a^2}{a(a-x)x}$

$K = \dfrac{x^2+a^2-x^2+a^2}{a(a-x)x} = \dfrac{2a^2}{a(a-x)x}$

$K = \dfrac{2a}{x(a-x)}$

Clave B

23. $P(x) = 2x^3 - 8x$

$P(x) = 2x(x^2-4) = 2x(x+2)(x-2)$

$Q(x) = 3x^4 + 3x^3 - 18x^2$

$Q(x) = 3x^2(x^2+x-6) \Rightarrow Q(x) = 3x^2(x+3)(x-2)$

x 3
x −2

$R(x) = 2x^5 + 10x^4 + 12x^3$

$= 2x^3(x^2+5x+6) \Rightarrow R(x) = 2x^3(x+3)(x+2)$

x 3
x 2

$\therefore MCM(P; Q; R) = 6x^3(x+3)(x^2-4)$

Clave A

24. $\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{ax+b}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{2x+6+5x+10}{(x+2)(x+3)}$

$7x + 16 = ax + b$

Se obtiene que: $a = 7 \wedge b = 16$

Nos piden: $ab = 112$

Clave A

25. $E = \dfrac{2x-15-x+2+3x-7}{x-5}$

$E = \dfrac{4x-20}{x-5} = \dfrac{4(x-5)}{x-5}$

$\therefore E = 4$

Clave D

Resolución de problemas

26. $A = \dfrac{1}{(a-1)^2} + \dfrac{2}{(a-1)^3} + \dfrac{2}{(a-1)^4}$

$$A = \frac{(a-1)^2 + 2(a-1) + 2}{(a-1)^4}$$

$$A = \frac{a^2 - 2a + 1 + 2a - 2 + 2}{(a-1)^4}$$

$$\therefore A = \frac{a^2 + 1}{(a-1)^4}$$

$\therefore$ Piden el numerador: $a^2 + 1$

Clave E

27. Los múltiplos comunes de A y B son:

$(2x-1)(4x+3)^3(x-1)^2(3x+1);$

$(2x-1)(4x+3)^3(x-1)^5(3x+1);$

Pero el de menor grado es el MCM:

$\therefore$ $\text{MCM}(A(x); B(x)) = (x-1)^5(4x+3)^3(2x-1)(3x+1)$

Clave B

28. $A(x) = (x+5)(x-2)$

$B(x) = x^2(x-5)(x+5)$

$C(x) = x(x+5)(x-1)$

$\therefore \text{MCD}(A(x); B(x); C(x)) = x + 5$

Clave A

Nivel 3 (página 50) Unidad 2

Comunicación matemática

29.

ES AQUELLA EXPRESIÓN DE
5 17 5 12 24 18 19 14 4

MENOR GRADO POSIBLE QUE
5 18 18 15 16 9 5 21

CONTIENE UN NÚMERO
3 20 5 14 21 21 5 15

ENTERO DE VECES COMO
5 5 15 4 5 5 15 15

FACTOR A DOS O MÁS
6 3 18 1 19 15 1

EXPRESIONES ALGEBRAICAS
24 19 15 19 1 5 1 1

Este concepto se refiere al : MCM

30.

- $\text{MCD}(A; B; C) = 14x^3yz^2$ (F)
- $\text{MCM}(A; B; C) = 12a^{10}b^{12}c^8$ (F)
- $\text{MCD}(P; Q; R) = 1$ y $\text{MCM}(P; Q; R) = 15(m-1)(m^2+m+1)$ (V)

Clave C

Razonamiento y demostración

31. $A = \left[\dfrac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{1-x^2}\right]\left[\dfrac{3 + x^2 - 4x^2}{4x}\right]$

$$A = \left[\frac{4\,.\,1\,.\,x}{1-x^2}\right]\frac{3(1-x^2)}{4x}$$

$\therefore A = 3$

Clave C

32. $E = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{m}{m+1}} = 1 + \dfrac{m+1}{2m+1}$

$$\therefore E = \frac{2m + 1 + m + 1}{2m+1} = \frac{3m+2}{2m+1}$$

Clave E

33. $R = \left(\dfrac{9x^2}{y^2} - 1\right)\left(\dfrac{6x}{3x-y} - 2\right)\left(\dfrac{y}{3x+y}\right)$

$$R = \left(\frac{9x^2 - y^2}{y^2}\right)\left(\frac{6x - 6x + 2y}{3x-y}\right)\left(\frac{y}{3x+y}\right)$$

$$R = \frac{(3x+y)(3x-y)}{y^2} \cdot \frac{2y}{(3x-y)} \cdot \frac{y}{(3x+y)}$$

$\therefore R = 2$

Clave B

34. $S = \dfrac{8 + 2(x^2-1) + (x^2+3)(x-1)}{(x^2+3)(x^2-1)}$

$$S = \frac{8 + 2x^2 - 2 + x^3 - x^2 + 3x - 3}{(x^2+3)(x^2-1)}$$

$$S = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{(x^2+3)(x^2-1)}$$

$$S = \frac{(x^2+3)(x+1)}{(x^2+3)(x^2-1)}$$

$$\therefore S = \frac{1}{x-1}$$

Clave D

35. En la expresión M, factorizando trinomios:

$$M = \frac{3(x+2)(x-1)}{(x-2)(x+1)} - \frac{3(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-1)} - \frac{8x}{(x+2)(x-2)}$$

$$M = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 3(x-2)^2(x+1)^2 - 8x(x+1)(x-1)}{(x-2)(x+1)(x+2)(x-1)}$$

Reduciendo:

$$M = \frac{4x(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$M = \frac{4x}{x^2-1}$$

$\therefore$ Piden el numerador: $4x$

Clave A

36. $F(x)=\dfrac{x^4(x+3)+x(x^2-2)+3(x^2-2)}{x^4(x-5)+x^2(x-5)-2(x-5)}$

$F(x)=\dfrac{x^4(x+3)+(x^2-2)(x+3)}{(x-5)(x^4+x^2-2)}$

$F(x)=\dfrac{(x+3)(x^4+x^2-2)}{(x-5)(x^4+x^2-2)}$

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$

$\therefore 3-5=-2$

Clave D

37. $E=\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}+\dfrac{x^2-4}{2x^2+5x+2}$

$E=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}+\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(2x+1)}$

$\Rightarrow E=\dfrac{x+3}{2x+1}+\dfrac{x-2}{2x+1}=\dfrac{x+3+x-2}{2x+1}$

$\therefore E=1$

Clave D

38. $E=\left(\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{x^2-1}\right).(x-1)$

Homogenizando:

$E=\left\{\dfrac{2(x-1)+3(x+1)+6}{6(x+1)(x-1)}\right\}(x-1)$

$E=\dfrac{5x+7}{6(x+1)}$

Nos piden:
$(6x+6)-(5x+7)=x-1$

Clave C

Resolución de problemas

39. Si: x^2-x-6 es el MCD de P(x) y Q(x), entonces al dividir P(x) y Q(x) por x^2-x-6 el residuo es cero.

1	2	–3	1	A	B
1		2	12		
6			–1	–6	
				12	72
	2	–1	12	0	0

$\Rightarrow A=-6$ y $B=-72$

1	3	–7	0	M	N
1		3	18		
6			–4	–24	
				14	84
	3	–4	14	0	0

$\Rightarrow M=10$ y $N=-84$

$\therefore AN+BM=-216$

Clave B

40. $S=\dfrac{1+\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{\dfrac{x-y+x+y}{x-y}}{\dfrac{x+y+x-y}{x+y}}\Rightarrow S=\dfrac{\dfrac{2x}{x-y}}{\dfrac{2x}{x+y}}=\dfrac{x+y}{x-y}$

Nos piden: $x+y+x-y=2x$

Clave B

41. $P(x)\,.\,Q(x)=[MCM(P(x);Q(x))].[MCD(P(x);Q(x))]$

$P(x)\,.\,Q(x)=(x^3-x^2-4x+4)(x^2+x-2)$

$\therefore P(x)\,.\,Q(x)=x^5-7x^3+2x^2+12x-8\Rightarrow$ coef. $=1-7+2+12-8$
$=0$

Clave D

42. Factorizando y efectuando:

$N=\left[\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-5)(x+4)}\right]\left[\dfrac{(x+4)(x+1)}{x(x-1)}\right]\left[\dfrac{(x-5)(x+3)\cdot x^2}{(x+2)(x+1)(x+3)}\right]$

Simplificando factores: y denominador: $N=x$
Sumamos el numerador y denominador: $x+1$

Clave A

43. Efectuando:

$M=\dfrac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2-(1-x)^2}\cdot\left[\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right]$

Por productos notables: $M=\dfrac{2(1+x^2)}{4(1)(x)}\cdot\left[\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right]$

De donde: $M=x$

Clave E

44. $E=\dfrac{abx^2+aby^2+xya^2+xyb^2}{abx^2-aby^2+xya^2-xyb^2}$

$E=\dfrac{(abx^2+a^2xy)+(aby^2+b^2xy)}{(abx^2+a^2xy)-(aby^2+b^2xy)}$

Agrupando: $E=\dfrac{ax(bx+ay)+by(ay+bx)}{ax(bx+ay)-by(ay+bx)}$

Extraemos factor comun:

$E=\dfrac{(bx+ay)(ax+by)}{(bx+ay)(ax-by)}$

$E=\dfrac{ax+by}{ax-by}$ $\therefore$ Su denominador es: $ax-by$

Clave C

45. El MCM es: $(x^n-1)(x^n+1)$

$A=\dfrac{x^{3n}(x^n+1)-x^{2n}(x^n-1)-(x^n+1)+(x^n-1)}{(x^n-1)(x^n+1)}$

$A=\dfrac{x^{4n}+x^{3n}-x^{3n}+x^{2n}-x^n-1+x^n-1}{x^{2n}-1^2}$

$A=\dfrac{x^{4n}+x^{2n}-2}{x^{2n}-1}=\dfrac{(x^{2n}+2)(x^{2n}-1)}{(x^{2n}-1)}$

Reduciendo: $A=x^{2n}+2$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 54) Unidad 2

Comunicación matemática

1. I. $2\sqrt{x}=\sqrt{4}\sqrt{x}=\sqrt{4x}$ ...(V)

II. $\sqrt{12y^3}=\sqrt{4y^2 \cdot 3y}=2y\sqrt{3y}$ ...(V)

III. $\frac{x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}}{x}=\sqrt{x}$ ...(V)

Clave A

2. I. $\sqrt{5+2\sqrt{4}}=\sqrt{5+2\times 2}=\sqrt{9}=3$ ...(I)

II. $\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{7+2\sqrt{4\times 3}}=2+\sqrt{3}$ ...(C)

III. $\sqrt{(-5)^2}=5$ ...(I)

Clave C

Razonamiento y demostración

3. $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}=\frac{10.\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{5^2}}=\frac{10\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}}$

$=\frac{10\sqrt[3]{25}}{5}=2\sqrt[3]{25}$

Clave D

4. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\sqrt[3]{4}}{2}=\sqrt[3]{4}$

Clave D

5. $32=16.2 \ \wedge\ 18=16+2$

$\therefore P=\sqrt{16}-\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$

Clave E

6. $27=25+2 \ \wedge\ 50=25.2$

$\therefore A=\sqrt{25}-\sqrt{2}=5-\sqrt{2}$

Clave A

7. Efectuamos:

$$\frac{1}{a^2-1}\left[\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}-\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right]$$

Reduciendo:

$$\frac{1}{(a^2-1)}\times\left[4a\sqrt{a^2-1}\right]=\frac{4a}{\sqrt{a^2-1}}$$

Clave B

8. $\sqrt{30+\sqrt{704}}=\sqrt{30+\sqrt{176\times 4}}$

$=\sqrt{22+8+2\sqrt{22\times 8}}$

$=\sqrt{22}+\sqrt{8}$

Clave A

Resolución de problemas

9. $\sqrt{\frac{16+5\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}}=a+\sqrt{b}$

Resolviendo:

$\sqrt{\frac{(16+5\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}}=a+\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{99+36\sqrt{7}}{4^2-(\sqrt{7})^2}}=a+\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{99+36\sqrt{7}}{9}}=a+\sqrt{b}$

$\sqrt{11+4\sqrt{7}}=a+\sqrt{b}$

$\sqrt{11+2\sqrt{28}}=a+\sqrt{b}$

$\sqrt{(7+4)+2\sqrt{7.4}}=a+\sqrt{b}$

$\sqrt{7}+\sqrt{4}=a+\sqrt{b}$

$\Rightarrow a=2 \ \wedge\ b=7$

$\therefore B=a^2+b^2=53$

Clave D

10. $E=\left[\frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,b(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)a}\right]^2$

$E=\left[\frac{a+b\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}+a)}\right]^2$

$E=\left[\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right]^2=\frac{1(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$

$E=3+2\sqrt{2}$

$E=3+\sqrt{8}=a+\sqrt{b}$

$\Rightarrow a=3 \ \wedge\ b=8$

$\therefore a+b=11$

Clave C

Nivel 2 (página 54) Unidad 2

Comunicación matemática

11. LA RADICACIÓN ES AQUELLA OPERACIÓN MATEMÁTICA QUE CONSISTE EN OBTENER UNA EXPRESIÓN LLAMADA RAÍZ CONOCIENDO OTRAS DOS DENOMINADAS ÍNDICE Y RADICANDO.

12. I. $2+\sqrt{3}$ $\boxed{<}$ $5+\sqrt{3}$

II. $4+\sqrt{3}$ $\boxed{>}$ $3+\sqrt{3}$

III. $2-\sqrt{2}$ $\boxed{<}$ $4-\sqrt{2}$

IV. $3-\sqrt{2}$ $\boxed{<}$ $5-\sqrt{2}$

Razonamiento y demostración

13. $\frac{16}{\sqrt[6]{2}}=\frac{16.(\sqrt[6]{2^5})}{\sqrt[6]{2}.\sqrt[6]{2^5}}=\frac{16.(\sqrt[6]{2^5})}{\sqrt[6]{2^6}}$

$=\frac{16.(\sqrt[6]{2^5})}{2}=8(\sqrt[6]{32})$

Clave E

14. Multiplicando por la conjugada:

$$\frac{1}{\left[(a+b)-\sqrt{2ab}\right]}\frac{\left[(a+b)+\sqrt{2ab}\right]}{\left[(a+b)+\sqrt{2ab}\right]}$$

$=\frac{a+b+\sqrt{2ab}}{a^2+b^2}$

$\therefore$ Su denominador es: a^2+b^2

Clave D

15. $\frac{4}{\sqrt{2003}+n}=\sqrt{2007}-\sqrt{2003}$

$\frac{4}{\sqrt{2003}+n}=\frac{(\sqrt{2007}-\sqrt{2003})}{(\sqrt{2007}+\sqrt{2003})}.(\sqrt{2007}+\sqrt{2003})$

$\frac{4}{\sqrt{2003}+n}=\frac{4}{\sqrt{2003}+\sqrt{2007}}$

$\Rightarrow n=\sqrt{2007}$

Nos piden:

$\sqrt[3]{\frac{n^2-7}{2}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2007}^2-7}{2}}=\sqrt[3]{1000}=10$

Clave C

16. $E=\sqrt{\underbrace{3}_{2+1}-2\sqrt{\underbrace{2}_{2.1}}}-\sqrt{2}$

$E=(\sqrt{2}-\sqrt{1})-\sqrt{2}=-1$

Clave B

17. $M=\sqrt{\underbrace{5}_{3+2}+2\sqrt{\underbrace{6}_{3.2}}}-\sqrt{3}$

$M=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{3}=\sqrt{2}$

Clave C

18. $E=\sqrt{\underbrace{11}_{8+3}+2\sqrt{\underbrace{24}_{8.3}}}-\sqrt{3}$

$E=(\sqrt{8}+\sqrt{3})-\sqrt{3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Clave E

Resolución de problemas

19. $\sqrt{5x-2+2\sqrt{(3x+1)(2x-3)}}=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx-a}$

$\sqrt{(3x+1)+(2x-3)+2\sqrt{(3x+1)(2x-3)}}$

$=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx-a}$

$\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-3}=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx-a}$

$\Rightarrow a=3; b=1 \ \wedge\ c=2$

$\therefore a+b+c=6$

Clave C

20. Del enunciado:

$$\frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

$$=\frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(3+4\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Luego:

$a=6;\ b=5\ \wedge\ c=2$

$\therefore c^b+a=2^5+6=38$

Clave B

Nivel 3 (página 55) Unidad 2

Comunicación matemática

21.

22.

Razonamiento y demostración

23. $\frac{12}{\sqrt{7}}-\frac{4}{\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{7}}-\frac{3}{\sqrt{7}}$

$$=(12-4+2-3)\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$=\frac{7.\sqrt{7}}{\sqrt{7}.\sqrt{7}}=\frac{7.\sqrt{7}}{7}=\sqrt{7}$$

Clave E

24. $R=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

$$R=\frac{\sqrt{3}-2+1}{\sqrt{3}-\sqrt{1}}$$

$$\therefore R=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=1$$

Clave A

25. Un radical simple es:

$$M=\sqrt{7-2\sqrt{6+2\sqrt{8}}}$$

$$M=\sqrt{7-2\sqrt{6+2\sqrt{4.2}}}$$

$$M=\sqrt{7-2(2+\sqrt{2})}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$M=\sqrt{2}-1$$

$\therefore$ Los radicales simples son: $\sqrt{2}\ \wedge 1$

Clave C

26. $A=\sqrt{\underbrace{2x-1}_{x+x-1}+2\sqrt{\underbrace{x^2-x}_{x(x-1)}}}-\sqrt{x-1}$

$$A=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x}$$

Clave A

27. $M=\sqrt{11+\sqrt{72}}$

$A=11\ \wedge\ B=72$

$\Rightarrow\ C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{121-72}$

$C=7$

$$\Rightarrow\ M=\sqrt{\frac{11+C}{2}}+\sqrt{\frac{11-C}{2}}$$

$$M=\sqrt{\frac{11+7}{2}}+\sqrt{\frac{11-7}{2}}$$

$\therefore\ M=3+\sqrt{2}$

Clave B

28. Racionalizamos:

$$\frac{A}{\left[(2+\sqrt{2})+\sqrt[4]{2}\right]}\times\frac{(2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})}{\left[(2+\sqrt{2})-\sqrt[4]{2}\right]}$$

$$=\frac{A(2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})}{(2+\sqrt{2})^2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{A(2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})}{3(2+\sqrt{2})}\times\frac{(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{A(2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})(2-\sqrt{2})}{6}$$

$\therefore$ Su denominador es 6.

Clave A

Resolución de problemas

29. Factorizando el polinomio B(x):

$B(x)=4x^2y^2-24xy-28$

$=4(xy+1)(xy-7)$

Luego:

$$\sqrt{2A(x)-\sqrt{B(y)}}=\sqrt{2(xy-3)-\sqrt{4(xy+1)(xy-7)}}$$

$$=\sqrt{2xy-6-2\sqrt{(xy+1)(xy-7)}}$$

$$=\sqrt{(xy+1)+(xy-7)-2\sqrt{(xy+1)(xy-7)}}$$

$$=\sqrt{xy+1}-\sqrt{xy-7}$$

TI = 1

$\Rightarrow$ TI = –7

Clave B

30. $P(x)=n^2x^{4n}+2n^2x^{3n}+(n^2+8)x^{2n}+2nx^n+1$

Como P(x) tiene raíz cuarta exacta, tiene la forma:

$P(x)=(nx^{2n}+ax^n+1)^2$

$\Rightarrow P(x)=n^2x^{4n}+2anx^{3n}+(a^2+2n)x^{2n}+2ax^n+1$

Identificando factores:

- $2n^2=2an\Rightarrow n=a$
- $n^2+8=a^2+2n$

  $n^2+8=n^2+2n$

  $\therefore n=4$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 59) Unidad 2

Comunicación matemática

1. Se sabe:

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}; \forall a,b \in \mathbb{R}^+$

$\therefore$ La igualdad en III es incorrecta.

Clave B

2.

Razonamiento y demostración

3. Sabemos: $\frac{1+i}{1-i} = i$

Luego:

$E = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010} = (i)^{2010} = (i)^{\overset{\circ}{4}} = 1$

Clave C

4. $M = \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{2k+3} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{2k+3}$

$M = (i^2)^{k+1} \cdot i$

$\therefore\ M = (-1)^{k+1} \cdot i$

Clave B

5. $z_3 = 15 + 20i + 6i + 8i^2$

$z_3 = 15 + 26i - 8 = 7 + 26i$

Clave B

6. $z_1 = z_2$

$(a+2) + (b+3)i = 4 + (5-b)i$

$\Rightarrow a + 2 = 4 \quad \wedge \quad b + 3 = 5 - b$

$a = 2 \qquad 2b = 2$

$b = 1$

Se pide: $a + b = 3$

Clave A

7. $z = 3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 4i$

$E = |z| + |\bar{z}|$

$E = \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{3^2 + 4^2}$

$E = 5 + 5 = 10$

Clave C

8. $F = \frac{(1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)}{(1+i)^2(1+i) - (1-i)^2(1-i)}$

$F = \frac{2i(1+i) + (-2i)(1-i)}{2i(1+i) - (-2i)(1-i)}$

$F = \frac{2i(1+i) - 2i(1-i)}{2i(1+i) + 2i(1-i)}$

$F = \frac{2i(1+i-1+i)}{2i(1+i+1-i)}$

$F = \frac{2i}{2} = i$

Clave D

Resolución de problemas

9. $A_1 = -3\sqrt{7} + \sqrt{14}\,i$

$\Rightarrow |A_1|^2 = (-3\sqrt{7})^2 + (\sqrt{14})^2$

$\Rightarrow |A_1| = \sqrt{77}$

$|A_2| = 7|A_1| = 7\sqrt{77}$

Clave A

10. $(A - Bi)^2 = A + Bi$

$A^2 - B^2 - 2ABi = A + Bi$

$A^2 - B^2 = A \qquad ...(1)$

$-2AB = B \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \qquad ...(2)$

(2) en (1):

$B^2 = A^2 - A = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow B = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$T = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow Re(T) + Im(T) = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$

Clave C

Nivel 2 (página 60) Unidad 2

Comunicación matemática

11.

Suma	✓
Resta	número complejo
Multiplicación	✓
Cociente	la unidad

No se cumplen dos de las afirmaciones.

12.

Clave E

Razonamiento y demostración

13. $i^{13\,579} = i^{13\,576+3} = i^{\overset{\circ}{4k}+3} = i^3 = -i$

Clave B

14. $z = (mn; 6n)$ y $\bar{z} = (12; 18)$

$\bar{z} = (mn; -6n) = (12, 18)$

Entonces:

$mn = 12 \qquad ...(1)$

$-6n = 18 \qquad ...(2)$

De (2): $n = -3$

En (1): $m = -4$

Clave B

15. $P = \frac{(3-2ni)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}$

$P = \frac{(12+6n) + (9-8n)i}{16 - 9i^2}$

$P = \underbrace{\frac{12+6n}{25}}_{0} + \frac{(9-8n)i}{25}$

$\Rightarrow 12 + 6n = 0 \Rightarrow n = -2$

Clave C

16. $\frac{2+3i}{2+i} - a = bi$

$\frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = a + bi$

Multiplicando:

$\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i = a + bi$

Donde:

$a = \frac{7}{5} \ \wedge \ b = \frac{4}{5}$

Nos piden:

$5(a+b) = 5\left(\frac{7}{5} + \frac{4}{5}\right) = 11$

Clave A

17. Como: $\frac{1}{i} = -i$

Entonces:

$\frac{3+2i}{2-i} \cdot \left(\frac{2+i}{2+i}\right) + \frac{5-i}{2i}\left(\frac{i}{i}\right) + 2i = a + bi$

Efectuando:

$\frac{4+7i}{5} + \frac{-5i-1}{2} + 2i = a + bi$

$\frac{8 + 14i - 25i - 5 + 20i}{10} = a + bi$

$\frac{3+9i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{9i}{10} = a + bi$

Identificando términos:

$a = \frac{3}{10} \ \wedge \ b = \frac{9}{10}$

Clave A

18. $(3i-1)^3 = (3i-1)^2(3i-1)$

$= (-9 - 6i + 1)(3i - 1)$

$= (-8 - 6i)(3i - 1)$

$= -24i + 8 + 18 + 6i$

$= 26 - 18i$

$(1+3i)^3 = (1+3i)^2(1+3i)$

$= (1 + 6i - 9)(1 + 3i)$

$= (6i - 8)(1 + 3i)$

$= 6i - 18 - 8 - 24i$

$= -26 - 18i$

$-(3i-1)(3i+1) = -[(3i)^2 - 1^2]$

$= -(-9 - 1)$

$= 10$

$E = x^3 + y^3 - 3xy$

$E = \frac{26 - 18i + 26 + 18i}{8} - \frac{30}{4}$

$E = -1$

Clave D

Resolución de problemas

19. Calculamos primero z_1z_3 y z_2z_3 para después sumar los resultados:

$z_1z_3 = (-5 + 6i)9i = -45i + 54i^2 = -45i - 54$

$z_2z_3 = \frac{5}{4}(9i) = \frac{45}{4}i$

$z_1z_3 + z_2z_3 = -45i - 54 + \frac{45}{4}i$

$z_1z_3 + z_2z_3 = 45\left(\frac{1}{4} - 1\right)i - 54$

$z_1z_3 + z_2z_3 = -54 - \frac{135}{4}i$

Clave E

20. Sea: $z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Luego: $\frac{z}{z^2 + 64} = k \in \mathbb{R}$

Reemplazamos:

$\frac{a + bi}{(a + bi)^2 + 64} = k$

$\frac{a + bi}{a^2 - b^2 + 64 + 2abi} = k \quad ...(I)$

Recuerda:

Si: $\frac{a + bi}{c + di}$ es un número real: $\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Luego de (I):

$\frac{a}{a^2 - b^2 + 64} = \frac{b}{2ab}$

$a^2 + b^2 = 64 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 8$

$\therefore |z| = 8$

Clave B

21. Sea z_1 y z_2 el 1.er y 2.° número complejo, respectivamente.

$\Rightarrow z_1 = 5 + ai \wedge z_2 = b + di$

$z_1 + z_2 = 3 - 3i$

$5 + ai + b + di = 3 - 3i$

$\Rightarrow 5 + b = 3 \wedge a + d = -3 \quad ... (I)$

$b = -2$

Además:

$\frac{z_1}{z_2} = m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{5 + ai}{-2 + di} = m$

$5 + ai = -2m + mdi$

$\Rightarrow 5 = -2m \wedge a = md$

$m = -\frac{5}{2} \qquad a = -\frac{5}{2}d$

Reemplazando en (I):

$-\frac{5d}{2} + d = -3 \Rightarrow \frac{-5d + 2d}{2} = -3$

$\Rightarrow d = 2$

$\therefore z_2 = b + di = -2 + 2i$

Clave B

Nivel 3 (página 60) Unidad 2

Comunicación matemática

22. $z_1 = 9a - 4 - 10bi$

$z_2 = 8a + 20i^5$

Como $z_1 \wedge z_2$ son conjugados, entonces:

$z_1 = \overline{z}_2$

Luego: $9a - 4 - 10bi = 8a - 20i$

$\Rightarrow 9a - 4 = 8a \wedge -10b = -20$

$a = 4 \quad \wedge \quad b = 2$

Clave A

23.

Clave C

Razonamiento y demostración

24. $i^{9^{11^{13^{15}}}} = i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{11^{13^{15}}}} = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i$

Clave A

25. $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

z_1 y z_2 conjugados.

Luego:

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

$z_1 + z_2 = -1$

Elevamos al cubo:

$(z_1 + z_2)^3 = -1$

$z_1^3 + z_2^3 + 3z_1z_2(z_1 + z_2) = -1$

$\therefore z_1^3 - 3z_1z_2 + z_2^3 = -1$

Clave D

26. $z_1 = \frac{(1 - i)^4\left[(1 - i) - 1\right]}{(1 + i)^4}$

$z_1 = \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^4 . -i = (-i)^4 . -i$

$z_1 = i^4 . -i = -i$

Clave B

27. $S = \left(\frac{5 + 2i}{4 + 3i}\right)\left(\frac{4 - 3i}{4 - 3i}\right)25$

$S = \left(\frac{20 - 15i + 8i - 6i^2}{4^2 - (3i)^2}\right)25$

$S = \left(\frac{20 - 7i + 6}{16 - 9i^2}\right)25 = \left(\frac{26 - 7i}{16 + 9}\right)25$

$S = \left(\frac{26 - 7i}{25}\right)25 = 26 - 7i$

Clave B

28. Del enunciado:

$z = \frac{(8n + 18i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}$

$z = \frac{8n + 36 + (18 - 16n)i}{1 - (2i)^2}$

Por dato: z es un complejo real.

Entonces: $z = \frac{8n + 36}{5} + \underbrace{\frac{(18 - 16n)}{5}}_{0}i$

$\Rightarrow 18 - 16n = 0 \therefore n = \frac{9}{8}$

Clave B

29. De: $z = (\underbrace{2k - 5}_{a}; \underbrace{n + 2}_{b})$

$z^* = (-a; -b) = (5 - 2k; -n - 2)$

$\overline{z} = (a; -b) = (2k - 5; -n - 2)$

Dato:

$Re(z^*) = -13 = 5 - 2k \Rightarrow k = 9$

$Im(\overline{z}) = -10 = -n - 2 \Rightarrow n = 8$

Piden z:

$z = (2k - 5; n + 2)$

$z = (2(9) - 5; 8 + 2)$

$z = (13; 10)$

Clave E

Resolución de problemas

30. Desarrollamos:

$(a - bi)^2 + (b - ai)^2 = (a - i) + (b - i)$

$-4abi = a + b - 2i$

$(a + b) + 2(2ab - 1)i = 0$

$\left.\begin{array}{l} a + b = 0 \Rightarrow a = -b \\ 2(2ab - 1) = 0 \Rightarrow ab = \frac{1}{2} \end{array}\right\} -b^2 = \frac{1}{2}$

$b = \pm\frac{i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \mp i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a + bi = \mp i\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)i$

$= \mp\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

Nos piden: $|a + bi| = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}) = 1$

Clave B

31. $A(1 - 2i) = (x - 7)(1 - 2i)^3 + (5 + i)(1 - 2i) + 6$

$= (x - 7)(-11 + 2i) + (7 - 9i) + 6$

$= (90 - 11x) + (2x - 23)i$

Nos piden: $(90 - 11x) + (2x - 23) = 0$

$-9x + 67 = 0 \Rightarrow x = \frac{67}{9}$

Clave C

32. Si $3 + i$ y $3 - i$ son las soluciones de una ecuación, esta ha de ser proporcional a:

$(x - (3 + i))(x - (3 - i)) = 0$

- Realizamos el producto del primer miembro de la ecuación:

  $(x - (3 + i))(x - (3 - i)) = (x - 3 - i)(x - 3 + i)$

  $= ((x - 3) - i)((x - 3) + i) = (x - 3)^2 - i^2$

  $= x^2 - 6x + 9 + 1 = x^2 - 6x + 10$

- Por tanto, una de las ecuaciones que cumplan la condición indicada es: $x^2 - 6x + 10 = 0$

Clave A

MARATÓN MATEMÁTICA (página 62)

1.

P(x)	Q(x)	MCD	MCM
x^2y	x^3y^3	x^2y	x^3y^3
x^2-2x+1	$(x-1)^3$	$(x-1)^2$	$(x-1)^3$
$(x+1)^{100}(x-1)$	$(x-1)^4(x+1)^3$	$(x-1)(x+1)^3$	$(x+1)^{100}(x-1)^4$
a^2-1	$(a+1)^3$	$(a+1)$	$(a+1)^3(a-1)$
m^2+m	$m-1$	1	$m(m^2-1)$

2. Recordar: $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\Rightarrow \sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{5+2+2\sqrt{5.2}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

$\Rightarrow a=5, b=2 \;\therefore\; a-b=3$

Clave E

3. $S=i^{20/2}+i^7-i^3$

$S=\underbrace{i^{10}}+i^7-(-i)$

$\underbrace{i^8.i^2}+i^4.i^3+i$

$\underbrace{i^2}+\underbrace{i^3}+i$

$-1 \quad -i \quad +i$

$S=-1$

Clave B

4. Operando en los complejos:

$$H=\frac{-2i+(1+i)^2(1+i)}{\sqrt{-1.16}+\sqrt{-1(4)}}$$

$$H=\frac{-2i+2i(1+i)}{4i+2i}$$

$$H=\frac{-2}{6i}=\frac{-1}{3i}$$

Clave D

5. En lo que piden: $\dfrac{x^3-y^3}{x^6+y^6}=\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x^4-xy+y^4)}$

Del dato: $x-y=3$ al cuadrado:

$x^2-2xy+y^2=9$

$x^2+y^2=13$

$x^4+\underbrace{2(xy)^2}_{8}+y^4=169$

$x^4+y^4=161$

Reemplazamos los datos, en:

$$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x^4-xy+y^4)}=\frac{(3)(13+2)}{(13)(161-2)}=\frac{45}{13.159}=\frac{15}{689}$$

Clave C

6. $P(x;y)=\underbrace{x^2+2xy+y^2}_{(x+y)^2}-z^{12}$

$(x+y)^2-z^{12}$

Por diferencia de cuadrados: $(x+y+z^6)(x+y-z^6)$

$\Rightarrow$ Factores primos: $(x+y+z^6)$; $(x+y-z^6)$

Clave D

7. $P(1)=(1-4)(1-3)(1+1)+6=18$

Clave D

8. Si $x+2$ es MCD de los polinomios

$\Rightarrow x+2$ es factor de ambos y $x=-2$ es raíz.

Evaluamos: $P(-2)=(-2)^2+7(-2)+A=0$

$A=10$

$Q(-2)=(-2)^2-5(-2)+B=0$

$B=-14$

$\therefore A+B=-4$

Clave C

9. Factorizamos el numerador

PC (posibles ceros) de $3x^3+5x^2-6x-8$

$\pm\left\{\dfrac{\text{divisor } 8}{\text{divisor } 3}\right\}=\pm\{1; 2; 4; 8; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}...\}$

$\Rightarrow -2$ es cero del polinomio.

	3	5	−6	−8
−2		−6	2	8
	3	−1	−4	0

$\Rightarrow 3x^3+5x^2-6x-8 \equiv (3x^2-x-4)(x+2)$

3x ⟍⟋ −4

1x ⟋⟍ 1

$\equiv (3x-4)(x+1)(x+2)$

De manera análoga factorizamos el denominador:

	3	23	6	−56
−2		−6	−34	56
	3	17	−28	0

$\Rightarrow 3x^3+23x^2+6x-56 \equiv (x+2)(3x^2+17x-28)$

3x ⟍⟋ −4

1x ⟋⟍ 7

$\equiv (x+2)(3x-4)(x+7)$

Reemplazamos: $M=\dfrac{(3x-4)(x+1)(x+2)}{(x+2)(3x-4)(x+7)}=\dfrac{x+1}{x+7}$

Clave D

10. $\dfrac{8mnx}{\underbrace{(1+mnx)^2-(1-mnx)^2}_{\text{Argand}}}=\dfrac{8mnx}{4mnx}=2$

Clave B

11. $\dfrac{2x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2x-8}}\cdot\dfrac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-8})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-8}}=\dfrac{(2x-12)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-8})}{-x+6}$

$=\dfrac{-2(-x+6)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-8})}{-x+6}$

$=-2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-8})$

Clave D

12. $(1+i)^2=2i$

$(1+i)^4=(2i)^2=4i^2$

Clave C

13. $P(\underbrace{x-1}_{\mu})=7x+3$

Cambio de variable

$x-1=\mu \;\Rightarrow\; P(\mu)=7(\mu+1)+3$

$x=\mu+1 \quad P(\mu)=7\mu+10$

$\therefore P(x)=7x+10$

Clave A

Unidad 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO
PLANTEO DE ECUACIONES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 67) Unidad 3

Comunicación matemática

1. NO, la solución no se altera en este caso.

2. A. Altura = base – 10
B. Base = altura + 5
C. (x + 1) + x = 17
D. 4(N + 2) = 16
E. 4N + 2 = 16

Razonamiento y demostración

3. $\frac{2x-1}{3} = x - 8$
$2x - 1 = 3x - 24$
$24 - 1 = 3x - 2x$
$\therefore x = 23$

Clave C

4. $\frac{3x+5}{2x+1} - 2 = 3$
$\frac{3x+5}{2x+1} = 5$
$3x + 5 = 5(2x + 1)$
$3x + 5 = 10x + 5$
$5 - 5 = 10x - 3x$
$0 = 7x$
$0 = x$
$\therefore x = 0$

Clave A

5. $\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} = 15$
$\frac{9x-4x}{6} = 15 \Rightarrow \frac{5x}{6} = 15$
$\therefore x = 18$

Clave C

6. $\frac{7x-5}{3x+1} = \left(\frac{11}{16}\right)^{-1} = \frac{16}{11}$

Multiplicamos en aspa:
$77x - 55 = 48x + 16$
$77x - 48x = 55 + 16$
$29x = 71 \Rightarrow x = \frac{71}{29}$

Clave C

7. $6x + 16 - 4x = -2x$
$16 + 2x = -2x$
$4x = -16 \Rightarrow x = -4$
$\therefore x = -4$

Clave A

8. $x - 5 = 24 \Rightarrow x = 29$

Clave D

9. $48x - 72 - 10x = 4$
$38x = 4 + 72$
$38x = 76 \Rightarrow x = 2$
$\therefore x = 2$

Clave C

10. Multiplicando en aspa:
$3(2x - 3) = 15$
$6x - 9 = 15$
$6x = 24$
$\therefore x = 4$

Clave B

11. Resolviendo:
$3(x - 2) + 9 = 24$
$3x - 6 + 9 = 24$
$3x = 21 \Rightarrow x = 7$

Clave C

12. MCM(1; 6) = 6
$6\left(\frac{17}{6} - 2x = x - \frac{1}{6}\right)$
$17 - 12x = 6x - 1$
$17 + 1 = 6x + 12x$
$18 = 18x$
$\therefore x = 1$

Clave D

13. MCM(2; 5) = 10
$10\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{5} = 6\right)$
$5x - 2x = 60$
$3x = 60$
$x = \frac{60}{3}$
$\therefore x = 20$

Clave B

14. $\frac{2x-8}{5} + 7 = 19$
$\frac{2x-8}{5} = 12$
$2x = 68 \Rightarrow x = 34$

Clave C

Resolución de problemas

15. Total de dinero: $12 . \underbrace{C}_{\text{precio de cada manzana}}$

Precio de manzanas: 12 – 9 = 3
$\therefore$ Tengo: 12 . C = 12(3) = S/.36

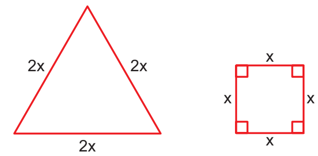
Clave B

16. $P + Q = x$
$P - a = Q + a \Rightarrow P = Q + 2a$
$\Rightarrow Q + 2a + Q = x$
$2Q = x - 2a$
$Q = \frac{x-2a}{2}$
$\Rightarrow P = \frac{x-2a}{2} + 2a = \frac{x+2a}{2}$

$\therefore$ P tiene más dinero.

Clave E

17. El lado del triángulo = doble del lado del cuadrado:



$6x + 4x = 120$
$x = 12$ m

$P = (2x)3 = 6(12) = 72$ m

Clave B

Nivel 2 (página 67) Unidad 3

Comunicación matemática

18. 1. EQUIVALENTES
2. DETERMINADAS
3. INCOMPATIBLES

19. $\therefore x = -5,5$

Razonamiento y demostración

20. $20x - 40 = 12x + 16$
$20x - 12x = 16 + 40$
$8x = 56$
$x = \frac{56}{8}$
$\therefore x = 7$

Clave D

21. MCM(3; 4) = 12
$12\left(\frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{4} = 2\right)$
$4x - 8 - 3x + 3 = 24$
$x - 5 = 24$
$x = 24 + 5$
$\therefore x = 29$

Clave C

22. $16 - 3x + 3 = 4x + 24 - 3$
$19 - 3x = 4x + 21$
$19 - 21 = 4x + 3x$
$-2 = 7x$
$\therefore x = \frac{-2}{7}$

Clave B

23. $5(x - 1) + 4(x + 1) = 17$
$9x - 5 + 4 = 17$
$9x = 18$
$\Rightarrow x = 2$

Clave B

24. $(x-3)^2 - 8 = (x+2)^2 - 23$

$(x-3)^2 - (x+2)^2 = 8 - 23$

$x^2 - 6x + 9 - (x^2 + 4x + 4) = -15$

$x^2 - 6x + 9 - x^2 - 4x - 4 = -15$

$-10x + 5 = -15$

$5 + 15 = 10x$

$20 = 10x$

$2 = x$

$\therefore x = 2$

Clave E

25. $(x+4)^2 + (x+1)^2 + 2x = (x+6)^2 + (x-1)^2$

$x^2 + 8x + 16 + x^2 + 2x + 1 + 2x$

$= x^2 + 12x + 36 + x^2 - 2x + 1$

$2x^2 + 12x + 17 = 2x^2 + 10x + 37$

$12x - 10x = 37 - 17$

$2x = 20$

$\therefore x = 10$

Clave C

26. $(x+3)^2 + (x+1)^2 = (x-2)^2 + (x-1)^2$

$x^2 + 6x + 9 + x^2 + 2x + 1$

$= x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1$

$2x^2 + 8x + 10 = 2x^2 - 6x + 5$

$8x + 6x = 5 - 10$

$14x = -5$

$\therefore x = -\frac{5}{14}$

Clave E

27. Determina el valor de x: $(x+3)^2 = (x+2)^2 + 19$

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 4x + 4 + 19$

$6x - 4x = 4 + 19 - 9$

$2x = 14$

$\therefore x = 7$

Clave A

28. $(x+2)^2 + (x+1)^2 = (x+3)^2 + x^2 - x$

$x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - x$

$2x^2 + 6x + 5 = 2x^2 + 5x + 9$

$6x - 5x = 9 - 5$

$x = 4$

$\therefore x = 4$

Clave D

29. $(x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + x^2 + 2x$

$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4$

$= x^2 + 6x + 9 + x^2 + 2x$

$2x^2 + 6x + 5 = 2x^2 + 8x + 9$

$-9 + 5 = 8x - 6x$

$-4 = 2x$

$-2 = x$

$\therefore x = -2$

Clave A

30. $7x - 42 + 5x + 2 = 8x + 32$

$12x - 40 = 8x + 32$

$4x = 72 \Rightarrow x = 18$

$\therefore x = 18$

Clave C

31. $\frac{1}{x} + 3 = \frac{x-3}{2x}$

$\frac{1+3x}{x} = \frac{x-3}{2x}$

$2 + 6x = x - 3 \Rightarrow x = -1$

$\therefore x = -1$

Clave D

Resolución de problemas

32. $A - B = x$

Si : $(A-5) - (B+3) = A - 5 - B - 3$

$= A - B - 8$

$= x - 8$

Clave E

33. Sean los números: x; $x + 1$

Del enunciado:

$x + x + 1 = \frac{1}{4}x + \frac{5}{3}(x+1)$

$2x + 1 = \frac{3x + 20x + 20}{12}$

$24x + 12 = 23x + 20 \Rightarrow x = 8$

Luego: $x + x + 1 = 8 + 8 + 1 = 17$

Nos piden el consecutivo de 17: es 18.

Clave A

34. $\frac{ax-1}{1-bx} = \frac{a}{b}$

$b(ax-1) = a(1-bx)$

$abx - b = a - abx$

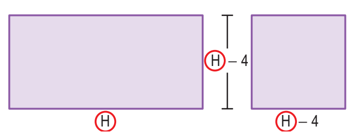
$abx + abx = a + b$

$2abx = a + b$

$\therefore x = \frac{a+b}{2ab}$

Clave A

35.



$2H + 2(H-4) = 2(4(H-4))$

$H = 6$ m

Dimensiones del rectángulo

Altura $= H - 4 = 6 - 4 = 2$ m

Base $= H = 6$ m

Clave E

Nivel 3 (página 68) Unidad 3

Comunicación matemática

36. Veamos el paso C:

$(x^2+1)(2x-1) = x^2(2x-1)$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (es solución)

Veamos el paso D:

$x^2 + 1 = x^2$

$1 = 0$ (absurdo)

Clave A

37. Si se multiplica a ambos miembros de una ecuación por una expresión que contenga a la incógnita, estos deben considerarse diferente de cero.

Razonamiento y demostración

38. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{x^2+x} = \frac{98}{99}$

$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{98}{99}$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{98}{99}$

$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{98}{99}$

$\frac{x}{x+1} = \frac{98}{99}$

$\therefore x = 98$

Clave E

39. $\frac{x - 2b + bc}{a + b - bc} + b\left(\frac{x+2a}{a+b}\right) = b - 1$

$\frac{x - 2b + bc}{a + b - bc} + 1 + b\left(\frac{x+2a}{a+b}\right) - b = 0$

Reduciendo:

$\frac{x - 2b + bc + a + b - bc}{a + b - bc} + \frac{b(x + a - b)}{a+b} = 0$

$\frac{x + a - b}{a + b - bc} + \frac{b(x+a-b)}{a+b} = 0$

$(x + a - b)\left(\frac{1}{a+b-bc} + \frac{b}{a+b}\right) = 0$

$x + a - b = 0 \Rightarrow x = b - a$

Nos piden:

$\frac{bx + ab}{ax - ab} = \frac{b(x+a)}{a(x-b)} = \frac{b(b-a+a)}{a(b-a-b)} = -\frac{b^2}{a^2}$

Clave C

40. Del enunciado, se deduce:

$3 + \frac{1}{\frac{41}{5} - x} = 3 + \frac{1}{x + \frac{1}{5}}$

$\Rightarrow \frac{41}{5} - x = x + \frac{1}{5}$

$\frac{41-1}{5} = 2x$

$8 = 2x$

$\therefore x = 4$

Clave A

41. Del enunciado:

$\frac{x-1}{x+a-b} - \frac{(1-x)}{x-a+b} = 2$

Resolvemos:

$$(x-1)\left(\frac{1}{x+a-b}+\frac{1}{x-a+b}\right)=2$$

$$\frac{(x-1)\cdot 2x}{(x+a-b)(x-a+b)}=2$$

Entonces:

$$x^2-x=x^2+2ab-a^2-b^2$$

$$x=a^2-2ab+b^2$$

$$\therefore x=(a-b)^2$$

Clave B

42. $2\left(\frac{11-x}{2}-(2x+6)=4(3x-5)\right)$

$$11-x-4x-12=24x-40$$

$$-5x-1=24x-40$$

$$39=29x$$

$$\therefore\ x=\frac{39}{29}$$

Clave A

43. $3\left(\frac{x-6}{3}+8=2x-7\right)$

$$x-6+24=6x-21$$

$$21-6+24=6x-x$$

$$39=5x$$

$$\therefore x=\frac{39}{5}$$

Clave B

44. MCM(5; 4) = 20

$$20\left(\frac{4x-3}{5}=\frac{3}{4}+2x\right)$$

$$16x-12=15+40x$$

$$-12-15=40x-16x$$

$$-27=24x$$

$$\therefore x=-\frac{9}{8}$$

Clave A

45. $5\left[8\left(\frac{x}{5}+7\right)+\frac{2x}{5}=1\right]$

$$8x+280+2x=5$$

$$10x=5-280$$

$$10x=-275$$

$$x=\frac{-275}{10}$$

$$\therefore x=-\frac{55}{2}$$

Clave B

Resolución de problemas

46. Total de dinero: 12m

Gasto en pasajes: 6m

Gasto en comida: 2m

Total – Gastos = 12m – 8m = 4m = 10

$$\Rightarrow\ m=\frac{10}{4}$$

Inicialmente tenía:

$$12(m)=12\left(\frac{10}{4}\right)=\text{S/.}30$$

Clave D

47. $n^2x-n^2+3n=x+2$

$$n^2x-x=n^2-3n+2$$

$$x(n^2-1)=(n-2)(n-1)$$

$$x=\frac{(n-2)(n-1)}{(n-1)(n+1)}=\frac{n-2}{n+1}$$

Dato: la ecuación es incompatible:

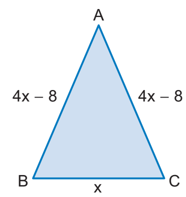
$n+1=0$

$\therefore n=-1$

Clave B

48. Sea la medida del lado a: x

Entonces tenemos:



$$2(4x-8)+x=29$$

$$x=5\text{ m}$$

Lados del triángulo:

$a=x=5$ m

$b=c=4x-8=12$ m

Clave B

49. Sea: lo que gasta: G

lo que no gasta: d – G

Dato: $G=\frac{r}{2}(d-G)$ ...(α)

Piden: $\underbrace{x}_{\text{Semanas}}(d-G)=q$ ...(β)

De α:

$$G+\frac{Gr}{2}=\frac{rd}{2}$$

$$G=\frac{\frac{rd}{2}}{1+\frac{r}{2}}=\frac{rd}{2+r}$$

En β:

$$x\left(d-\frac{rd}{2+r}\right)=q$$

$$\therefore\ x=\frac{q}{d-\frac{rd}{2+r}}$$

Clave C

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 72) Unidad 3

Comunicación matemática

1. Se denomina sistema determinado cuando el número de ecuaciones independientes es igual al número de incógnitas.

2. SUSTITUCIÓN
REDUCCIÓN
IGUALACIÓN

Razonamiento y demostración

3. $x + 2y = 17$ ↓ (–)
$x - y = -1$
$3y = 18 \Rightarrow y = 6$

Clave A

4. $4y + 3x = 34$ ...(1)
$6x - 2y = -2$ ...(2)

Multiplicamos por 2 a (2):
$4y + 3x = 34$ ↓ (+)
$-4y + 12x = -4$
$15x = 30$
$x = 2$

Evaluamos $x = 2$ en (2):
$6(2) - 2y = -2$
$12 + 2 = 2y$
$\therefore 7 = y$

Clave A

5. $4x + 7y = 87$ ...(1)
$8x - 3y = 157$ ...(2)

Multiplicamos por 2 a (1):
$8x + 14y = 174$ ↓ (–)
$8x - 3y = 157$
$17y = 17$
$y = 1$

Evaluamos $y = 1$ en (2):
$8x - 3(1) = 157$
$8x = 160$
$x = 20$

Clave C

6. $14x - 5y = 60$ ...(1)
$8x - 2y = 36$ ...(2)

Multiplicamos por 2 a (1) y por 5 a (2):
$28x - 10y = 120$ ↓ (–)
$40x - 10y = 180$
$-12x = -60$
$x = 5$

Evaluamos $x = 5$ en (2):
$8(5) - 2y = 36$
$-2y = -4$
$y = 2$

Clave A

7. $15x - 8y = 52$ ...(1)
$8x + 3y = 35$ ...(2)

Multiplicamos por 3 a (1) y por 8 a (2):
$45x - 24y = 156$ ↓ (+)
$64x + 24y = 280$
$109x = 436$
$x = 4$

Clave B

8. $5x - y = 23$ ↓(+) ...(1)
$2x + y = 19$ ...(2)
$7x = 42$
$x = 6$

Reemplazamos $x = 6$ en (1):
$5(6) - y = 23$
$y = 7$

Clave A

9. $9x - 6y = 0$ ...(1)
$8x + 3y = 125$ ...(2)

Multiplicamos por 2 a (2):
$9x - 6y = 0$ ↓ (+)
$16x + 6y = 250$
$25x = 250$
$x = 10$

Clave A

10. $-17(13x + y = 33)$
$11x + 17y = 141$
$-221x - 17y = -561$ } (+)
$11x + 17y = 141$
$-210x = -420$
$\therefore\ x = 2$

Clave B

11. Resolvamos:
$5x - 7y = 49$ ...(I)
$2x + 3y = 8$ ...(II)
(I) × 3: $15x - 21y = 147$
(II) × 7: $14x + 21y = 56$

Sumamos: $29x = 203 \Rightarrow x = 7$

Reemplazamos en (II):
$2(7) + 3y = 8 \Rightarrow y = -2$

Nos piden: $xy = -14$

Clave B

Resolución de problemas

12. Sean N y M los números fraccionarios, entonces:
$97N + 46M = 316$
$22N + 73M = 517$
Sumamos: $119N + 119M = 833$
$N + M = \frac{833}{119} = 7$

Clave D

13. $A + B = 30 \wedge A > B$

$A + 6 = 3B$

$A - 3B = -6$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} A - 3B = -6 \\ A + B = 30 \\ \hline -4B = -36 \end{array} \downarrow (-)$$

$B = 9 \Rightarrow A = 21$

$\therefore A \,.\, B = 9 \,.\, 21 = 189$

Clave E

Nivel 2 (página 72) Unidad 3

Comunicación matemática

14. Consideramos:

J: Juanito

A: Anita

Del enunciado:

$J + A = 120$

$J - A = 24$

Clave A

15. El enunciado está escrito al revés: empieza desde el final hacia el principio.

"Para resolver con sistema de ecuaciones no lineales no existe un método general, sin embargo de acuerdo a la forma que presenta el sistema, se resolverá utilizando capítulos anteriores ya vistos como productos notables, factorización, diversos artificios, inclusive hay problemas que se resuelven geométricamente".

Razonamiento y demostración

16. $\begin{cases} 2x - 3y = 9 & \text{...(1)} \\ 4x - y = 8 & \text{...(2)} \end{cases}$

Multiplicando la ecuación (1) por –2:

$-4x + 6y = -18$ ...(3)

Sumando la ecuación (3) con la ecuación (2):

$$\begin{array}{r} -4x + 6y = -18 \\ 4x - y = 8 \\ \hline 5y = -10 \end{array} \downarrow (+) \Rightarrow y = -2$$

Reemplazamos y = –2 en (2):

$4x - (-2) = 8 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\therefore x \,.\, y = \left(\frac{3}{2}\right)(-2) = -3$

Clave C

17. $x - 3y = 5$ ...(1)

$7x - 9y = 39$ ...(2)

Multiplicando (1) por –3:

$$\begin{array}{r} -3x + 9y = -15 \\ 7x - 9y = 39 \\ \hline 4x = 24 \end{array} \downarrow (+) \Rightarrow x = 6$$

Reemplazando x = 6 en (1):

$6 - 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

$\therefore x + y = \frac{19}{3}$

Clave A

18.
$$\begin{array}{r} a + 7b = 15 \\ 3a - 7b = -11 \\ \hline 4a = 4 \end{array} \downarrow (+) \quad \begin{array}{l} \text{...(1)} \\ \text{...(2)} \end{array}$$

$a = 1$

Reemplazando a = 1 en (1):

$1 + 7b = 15$

$7b = 14 \Rightarrow b = 2$

$\therefore \frac{b}{a} = 2$

Clave B

19. $2x + 3y = 5$ ...(1)

$3x - 2y = 1$ ...(2)

De (1) y (2):

$\Rightarrow -3(2x + 3y = 5)$

$2(3x - 2y = 1)$

$$\left.\begin{array}{r} -6x - 9y = -15 \\ 6x - 4y = 2 \end{array}\right\} (+)$$

$-13y = -13 \Rightarrow y = 1$

Reemplazamos y = 1 en (1):

$2x + 3(1) = 5$

$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 2$

$\therefore x = 1$

Clave E

20. $3x - y = -6$ ...(1)

$2x + 3y = 7$ ...(2)

De (1):

$y = 3x + 6$ ...(3)

(3) en (2):

$2x + 3(3x + 6) = 7$

$2x + 9x + 18 = 7$

$11x = -11$

$x = -1$

En (3):

$y = 3(-1) + 6$

$y = 3$

Nos piden:

$\therefore xy = (-1)3 = -3$

Clave B

21. $4x + 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5 - 4x}{2}$ ...(1)

$5x - 3y = -2 \Rightarrow y = \frac{5x + 2}{3}$ ...(2)

Igualamos (1) y (2):

$\frac{5 - 4x}{2} = \frac{5x + 2}{3}$

$15 - 12x = 10x + 4$

$11 = 22x$

$x = \frac{1}{2}$ ...(3)

En (1):

$y = \frac{5 - 4\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$

$y = \frac{3}{2}$

Nos piden:

$\therefore x + y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

Clave A

22.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 47 \\ 8 & -2 & 48 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Tomando como referencia la 3.^{era} fila f_3.

$$A = -\begin{vmatrix} 5 & 47 \\ 8 & 48 \end{vmatrix} = -(5(48) - 8(47))$$

$$= -(240 - 376) = 136$$

Clave E

23.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 7 \\ 8 & -5 & 66 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Tomando como referencia la 3.^{era} fila f_3.

$$H = -1\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 7 \\ -5 & 66 \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{2}(66) - (-5)7\right)$$

$$= -(33 + 35) = -68$$

Clave D

24. $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 3$ ...(1)

$7x + y = 41$ ...(2)

Multiplicamos por 15 a (1) y por 5 a (2):

$$\begin{array}{r} 3x + 5y = 45 \\ 35x + 5y = 205 \\ \hline -32x = -160 \end{array} \quad (-)$$

$\therefore x = 5$

Clave B

Resolución de problemas

25. Del enunciado:

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	y	2x	63 – 2x
Tú	x	y	2x

cte. cte.

$2x - y = y - x \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$ ... (I)

Luego:

$63 - 2x - 2x = 2x - y$

$63 = 6x - y$ ... (II)

Reemplazamos (I) en (II):

$63 = 6x - \frac{3}{2}x \Rightarrow x = 14$

Nos piden: $2x = 28$ años

Clave C

26. Hermanos x   Hermanas y

Pedro dice:

Tengo: $x = y$ ...(1)

Mi hermana: $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$ ...(2)

Desarrollando (2):

$2y - 2 = x + 1$ ...(3)

Reemplazando (1) en (3):

$2x - 2 = x + 1$

$x = 3 \Rightarrow y = 3$

$\therefore$ Somos:

$x + y + \text{Juan} = 3 + 3 + 1 = 7$ hijos

Clave B

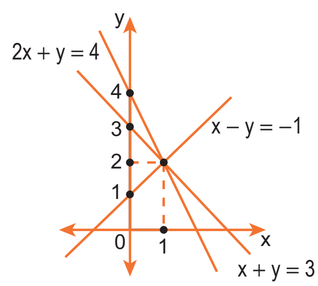
Nivel 3 (página 73) Unidad 3

Comunicación matemática

27. EL SISTEMA SERÁ COMPATIBLE INDETERMINADO, ES DECIR, TENDRÁ INFINITAS SOLUCIONES, SI SE VERIFICA:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

28. • Las rectas dadas en el gráfico, tienen las siguientes ecuaciones:



• El sistema de ecuaciones que está representado por la gráfica adjunta es:

III. $x - y = -1$
$2x + y = 4$
$x + y = 3$

Clave C

Razonamiento y demostración

29. Por condición del enunciado:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ x & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Tomando como referencia la 2.º fila f_2.

$$-x\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$-x(2 + 18) + (3 - 18) - (-18 - 12) = 0$

$-20x - 15 - (-30) = 0$

$-20x - 15 + 30 = 0$

$15 = 20x$

$3 = 4x$

$x = \frac{3}{4}$

Nos piden:

$6x = 6\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{2}$

Clave E

30. $4x + 3y = 25$ ...(1)

$3x + 4y = 24$ ...(2)

Multiplicando (1) por -3 y (2) por 4:

$-3(4x + 3y = 25)$
$4(3x + 4y = 24)$

$$\left.\begin{array}{l} -12x - 9y = -75 \\ 12x + 16y = 96 \end{array}\right\}(+)$$

$7y = 21 \Rightarrow y = 3$

Reemplazando $y = 3$ en la ecuación (1):

$4x + 3(3) = 25$

$4x + 9 = 25 \Rightarrow x = 4$

Luego:

$\Rightarrow b(4 + 3) + b = 32$

$8b = 32 \quad \therefore \ b = 4$

Clave D

31. $7m - 2n = -34$ ...(1)

$5m + 3n = -11$ ...(2)

$3(7m - 2n = -34)$
$2(5m + 3n = -11)$

$$\left.\begin{array}{l} 21m - 6n = -102 \\ 10m + 6n = -22 \end{array}\right\}(+)$$

$31m = -124 \Rightarrow m = -4$

Reemplazando $m = -4$ en (1):

$7(-4) - 2n = -34$

$-28 - 2n = -34$

$2n = 6 \Rightarrow n = 3$

$\therefore \ m + n = -1$

Clave C

32. $\frac{x}{a + b} + \frac{y}{a - b} = 2a$

$\Rightarrow \ x = \left(2a - \frac{y}{a - b}\right)(a + b)$

$x - y = 4ab \Rightarrow \ x = 4ab + y$

Igualamos las ecuaciones:

$\left(2a - \frac{y}{a - b}\right)(a + b) = 4ab + y$

$2a^2 + 2ab - \frac{(a + b)y}{a - b} = 4ab + y$

$2a^2 - 2ab = y\left(1 + \frac{a + b}{a - b}\right)$

$2a(a - b) = \frac{2ay}{a - b} \quad \therefore \ y = (a - b)^2$

Clave C

33. $2(2x + 3y = 5\sqrt{2} - 1)$

$3(3x - 2y = \sqrt{2} + 5)$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 6y = 10\sqrt{2} - 2 \\ 9x - 6y = 3\sqrt{2} + 15 \end{array}\right\}(+)$$

$13x = 13\sqrt{2} + 13$

$\therefore \ x = \sqrt{2} + 1$

Clave E

34. $\frac{x}{a + b} + \frac{y}{a - b} = 2$ ...(1)

$(a + b)y + (a - b)x = 2(x^2 - y^2)$ ...(2)

De (1):

$\frac{(a - b)x + (a + b)y}{a^2 - b^2} = 2$

$\Rightarrow (a - b)x + (a + b)y = 2(a^2 - b^2)$ ...(3)

El 1.er miembro de (2) y (3) son iguales, entonces:

$2(x^2 - y^2) = 2(a^2 - b^2)$

$\therefore x^2 - y^2 = a^2 - b^2$

Clave D

35. Como $(3; -1)$ es la solución del sistema:

$$\begin{cases} (a + b)x + (a - b)y = 10 & ...(1) \\ (2a - b)x + (2a - 3b)y = 12 & ...(2) \end{cases}$$

Por lo tanto, verifica (1) y (2); entonces:

$(a + b)(3) + (a - b)(-1) = 10$

$2a + 4b = 10$

$\Rightarrow a + 2b = 5$ ...(3)

$(2a - b)(3) + (2a - 3b)(-1) = 12$

$4a = 12$

$\Rightarrow a = 3$ ...(4)

Reemplazamos (4) en (3):

$3 + 2b = 5 \Rightarrow b = 1$

$\therefore (a - b) = (3 - 1) = 2$

Clave D

36. Del sistema:

$x + 2y = -3 \Rightarrow y = \frac{-3 - x}{2}$ ...(1)

$y + 2z = 7$ ...(2)

$z + 2x = 11 \Rightarrow z = 11 - 2x$ ...(3)

Reemplazamos (1) y (3) en (2):

$\left(\frac{-3 - x}{2}\right) + 2(11 - 2x = 7$

$-3 - x + 44 - 8x = 14$

$27 = 9x$

$\Rightarrow x = 3$

Reemplazamos $x = 3$ en (1) y (3), se tiene:

$y = -3 \quad \wedge \quad z = 5$

$\therefore x - y - z = 3 - (-3) - 5 = 1$

Clave E

Resolución de problemas

37. Del sistema:

$y - b = x^2$ ...(I)

$x - b = y^2$ ...(II)

Restamos (I) y (II):

$(x - y)(x + y + 1) = 0$

$x - y = 0 \ \vee \ x + y + 1 = 0$

Si: $x - y = 0 \Rightarrow x = y$

En (I):

$x - b = x^2 \Rightarrow x^2 - x + b = 0$

Sabemos que:

$\Delta = 1 - 4b \geq 0 \Rightarrow b \leq \frac{1}{4}$ ...(α)

Si: $x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1$

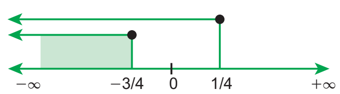
En (I):

$-x - 1 - b = x^2 \Rightarrow x^2 + x + b + 1 = 0$

Sabemos que:

$\Delta = 1 - 4(b + 1) \geq 0 \Rightarrow b \leq \frac{-3}{4}$ ...(β)

De (α) y (β):



$\therefore$ El máximo valor entero de b es: -1

Clave E

38. Del sistema:

$5x - 2y = m$ ...(I)

$3x + y = m - 1$ ...(II)

Multiplicando (II) por 2: $6x + 2y = 2m - 2$ ...(III)

Sumando (I) y (III):

$x = \frac{3m - 2}{11}$

Reemplazando en (II):

$y = \frac{2m - 5}{11}$

Dato: $x - y = 1$

Reemplazando en el dato:

$\frac{3m - 2}{11} - \frac{2m - 5}{11} = 1$

$m = 8$

Nos piden: $m^2 + 2 = 8^2 + 2 = 66$

Clave C

39. 1.ª posibilidad si $A > B$:

$\begin{cases} A + 2B = 93 \\ A - \ B = 6 \end{cases} \downarrow (-)$

$3B = 87$

$A = 29 \ \wedge \ A = 35$

2.ª posibilidad:

$\begin{cases} 2A + B = 93 \\ A - B = 6 \end{cases} \downarrow (+)$

$3A = 99$

$A = 33 \quad B = 27$

Clave E

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
PLANTEO DE ECUACIONES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 77) Unidad 3

Comunicación matemática

1. I. V

$(2m-1)(-2)^2+(m-1)(-2)-2=0$

$(2m-1)4-2m+2-2=0$

$8m-4-2m=0$

$6m=4$

$m=\frac{2}{3}$

II. V

$6x^2-7x-3=0$

$(3x+1)(2x-3)=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{4x_1^2-5}{2x_1-1}=\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^2-5}{2\left(\frac{3}{2}\right)-1}=\frac{4\left(\frac{9}{4}\right)-5}{3-1}=2$

III. F

$11x^2+10x-1=0$

$(11x-1)(x+1)=0$

$x_1=\frac{1}{11} \vee x_2=-1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2<0$

Clave A

2. COMPLETAS

INCOMPLETAS

DISCRIMINANTE

Razonamiento y demostración

3. $2x^2+9x-5=0$

$2x \quad -1$

$x \quad 5$

$(2x-1)(x+5)=0$

$2x-1=0 \quad \vee \quad x+5=0$

$x=\frac{1}{2} \qquad x=-5$

$CS=\{\frac{1}{2};-5\}$

Clave B

4. $6x^2-17x+10=0$

$6x \quad -5$

$x \quad -2$

$(6x-5)(x-2)=0 \Rightarrow x=\frac{5}{6} \quad \vee \quad x=2$

$\Rightarrow$ Mayor raíz es 2.

Clave C

5. $2x^2-7x+3=0$

$2x \quad -1$

$x \quad -3$

$(2x-1)(x-3)=0$

$2x-1=0 \vee x-3=0$

$x=\frac{1}{2} \quad \vee \quad x=3$

$\therefore$ La mayor solución es $x=3$.

Clave C

6. $4x^2+19x-5=0$

$x \quad +5$

$4x \quad -1$

$(x+5)(4x-1)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \vee x=-5$

$\Rightarrow$ Mayor raíz $x=\frac{1}{4}=0{,}25$

Clave B

7. $5x^2+14x-3=0$

$5x \quad -1$

$x \quad +3$

$(5x-1)(x+3)=0 \Rightarrow x=-3 \vee x=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ Menor raíz es $x=-3$.

Clave C

Resolución de problemas

8. $x^2+5x+6=0$

$x \quad 3$

$x \quad 2$

$(x+3)\ (x+2)=0$

$x=-3 \quad x=-2$

$CS=\{-2;-3\}$

Clave C

9. $2x^2-15x+(\lambda-1)=0$

Dato:

$\sqrt{x_1 . x_2}=2 \Rightarrow x_1 . x_2=4$

Sabemos que:

$\frac{\lambda-1}{2}=4$

$\lambda-1=8 \Rightarrow \lambda=9$

Clave D

10. $x^2=x+2$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2 \vee x=-1 \notin \mathbb{Z}^+$

$x=2$

Clave D

Nivel 2 (página 77) Unidad 3

Comunicación matemática

11. I. V

Sabemos:

Utilidad = Ingresos – Costos

$7921=(200-k)k-22(200-k)$

$7921=\underbrace{(200-k)}_{89}\underbrace{(k-22)}_{89}$

$200-k=89$

$k=S/.111$

- k costo de venta de cada puerta.

II. F
III. V
Ingresos = (200 – k)k
= (200 – 111)111
Ingreso = S/.9879

∴ Solo 2 proposiciones son verdaderas.

12. Multiplicando por 8 a ambos miembros de la ecuación:

$$\left(\frac{x+1}{2}+\frac{10x^2+3x}{8}\right)\boxed{8}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{5}{8}\right)\boxed{8}$$

$$\boxed{4}(x+1)+\boxed{1}(10x^2+3x)=\boxed{8}\left(\frac{x^2}{4}\right)+\boxed{1}5$$

$$\boxed{4}x+\boxed{4}+10x^2+3x=\boxed{2}x^2+5$$

Reduciendo términos semejantes:

$$10x^2+(\boxed{4}x+3x)+\boxed{4}=\boxed{2}x^2+5$$

$$10x^2+(\boxed{4}+3)x+\boxed{4}=\boxed{2}x^2+5$$

Transponiendo términos:

$$(10x^2-\boxed{2}x^2)+\boxed{7}x+(\boxed{4}-5)=0$$

$$(10-\boxed{2})x^2+\boxed{7}x+\boxed{-1}=0$$

$$\boxed{8}x^2+\boxed{7}x+\boxed{-1}=0$$

Las raíces de la ecuación serán:

$$x=\frac{-\boxed{7}\pm\sqrt{\boxed{7}^2-4\boxed{8}\boxed{-1}}}{2\boxed{8}}$$

$$x=\frac{-\boxed{7}\pm\sqrt{49+\boxed{32}}}{\boxed{16}}$$

$$x=\frac{-\boxed{7}\pm\boxed{9}}{\boxed{16}}$$

Donde:

$$x_1=\frac{-\boxed{7}+\boxed{9}}{\boxed{16}}\quad\vee\quad x_2=\frac{-\boxed{7}-\boxed{9}}{\boxed{16}}$$

$$\therefore x_1=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}\quad\vee\quad x_2=-\boxed{1}$$

Razonamiento y demostración

13. $(2x+1)^2-9(x+1)+9=0$

$4x^2+4x+1-9x-9+9=0$

$4x^2-5x+1=0$

$4x \quad -1$
$x \quad -1$

$4x-1=0 \quad \vee \quad x-1=0$

$x=\frac{1}{4} \qquad x=1$

∴ La menor raíz es 0,25.

Clave A

14. $(x+1)^2+x(x-9)+2=0$

$x^2+2x+1+x^2-9x+2=0$

$2x^2-7x+3=0$

$2x \quad -1$
$x \quad -3$

$2x-1=0 \quad \vee \quad x-3=0$

$x=\frac{1}{2} \qquad x=3$

∴ La mayor solución es 3.

Clave C

15. $2x^2+9x-5=0$

$2x \quad -1$
$x \quad +5$

$(2x-1)(x+5)=0$

$2x-1=0 \quad \vee \quad x+5=0$

$x_1=\frac{1}{2} \quad \vee \quad x_2=-5$

$\therefore \frac{x_1}{x_2}=-2,5$

Clave B

16. $(x+1)^2=4x-x^2+2$

$x^2+2x+1=4x-x^2+2$

$x^2+2x+1-4x+x^2-2=0$

$2x^2-2x-1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)(2)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

Clave D

17. $(x-2)^2+x=5$

$x^2-4x+4+x-5=0$

$x^2-3x-1=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(-1)(1)}}{2}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

Clave D

18. $(x+3)^2-4x=11$

$x^2+6x+9-4x-11=0$

$x^2+2x-2=0$

$$x=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(-2)(1)}}{2}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}$$

$x=-1\pm\sqrt{3}$

Clave B

Resolución de problemas

19. De la ecuación:

$3x^2-24x+8k-4=0$

Dato: $x_1=3x_2$

Sabemos que:

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow 3x_2 + x_2 = \frac{-(-24)}{3}$

$4x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 2$

Reemplazamos en la ecuación:

$3(2)^2 - 24(2) + 8k - 4 = 0$

$\therefore\ k = 5$

Clave E

20. $x^2 + (x + 2)^2 - 130 = 0$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 130 = 0$

$x^2 + 2x - 63 = 0$

x ⟶ +9

x ⟶ −7

$(x + 9)(x - 7) = 0$

$x + 9 = 0 \lor x - 7 = 0$

$x = -9 \lor x = 7$

$(\notin \mathbb{Z}^+)$

$\Rightarrow x = 7$

$\therefore$ El menor número es 7.

Clave D

Nivel 3 (página 78) Unidad 3

Comunicación matemática

21.

- La ecuación cuadrática pura carece del término de primer grado.
- La ecuación cuadrática mixta incompleta carece de término independiente.
- Las ecuaciones cuadráticas mixTas completas tienen término de segundo grado, término de primer grado y término independiente.

22. I. (C)

Tenga en cuenta que:
Gastaron = (# personas)(gasto de c/u)

El gasto de cada mujer: $x + 114$
El gasto de cada hombre: x
n.° hombres + n.° mujeres = 9

$$\frac{684}{x} + \frac{684}{x + 114} = 9 \quad ...(1)$$

II. (I)

Desarrollamos la ecuación:

$$\frac{76}{x} + \frac{76}{x + 114} = 1$$

$76(x + 114) + 76x = x(x + 114)$

$76x + 76(114) + 76x = x^2 + 114x$

$x^2 - 38x - 76(114) = 0$

x ⟶ +76

x ⟶ −114

$(x + 76)(x - 114) = 0$

$x = 114$

El número de mujeres será:

$$\text{n.° mujeres} = \frac{684}{x + 114} = \frac{684}{114 + 114} = 3$$

III. (C)

El gasto de cada mujer:
$x + 114 = 2(114)$

El gasto de cada hombre:
$x = 114$

$\Rightarrow$ el gasto de cada mujer = 2 (# gasto de cada hombre)

Razonamiento y demostración

23. $\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 1 = 0;\ x \neq 0$

$$\frac{3 + 2x - x^2}{x^2} = 0$$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

x ⟶ −3

x ⟶ 1

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3 \lor x = -1$

$CS = \{3; -1\}$

Clave A

24. $x^2 - 4x + 4 - m^2 = 0$

$$x_{1;\,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(4 - m^2)}}{2(1)}$$

$$x_{1;\,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16 + 4m^2}}{2} = \frac{4 \pm 2m}{2}$$

$x_{1;\,2} = 2 \pm m$

Por lo tanto, la mayor solución es: $2 + m$

Clave A

25. $3(x + 2)(x + 3) - 2(x + 5)(x - 3) - 18 = 0$

$3(x^2 + 5x + 6) - 2(x^2 + 2x - 15) - 18 = 0$

$3x^2 + 15x + 18 - 2x^2 - 4x + 30 - 18 = 0$

$3x^2 - 2x^2 + 15x - 4x + 18 + 30 - 18 = 0$

$x^2 + 11x + 30 = 0$

x ⟶ 5

x ⟶ 6

$(x + 5)(x + 6) = 0 \Rightarrow x = -6 \lor x = -5$

$\therefore$ Menor raíz es -6

Clave C

26. Resolvemos:

$6x^2 - 4ax = 3bx - 2ab$

$6x^2 - (4a + 3b)x + 2ab = 0$

3x ⟶ −2a

2x ⟶ −b

$x_1 = \frac{2a}{3} \quad \lor \quad x_2 = \frac{b}{2}$

$$CS = \left\{\frac{2a}{3}; \frac{b}{2}\right\}$$

Clave D

27. Resolvemos:

$$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$$

x (a+1)

x (a–1)

$(x + a + 1)(x + a - 1) = 0$

$x_1 = -a - 1 \;\vee\; x_2 = 1 - a$

Clave E

28. $(x - 2)^2 + (x + 5)(x - 2) = 0$

$(x - 2)(x - 2 + x + 5) = 0$

$(x - 2)(2x + 3) = 0$

$\Rightarrow x = 2 \;\vee\; x = -\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ Mayor raíz es $x = 2$.

Clave D

Resolución de problemas

29. $25x^2 - 35x + p = 0$

Dato: $2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 1$ ...(I)

Sabemos que:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{(-35)}{25} = \dfrac{35}{25} = \dfrac{7}{5}$

$x_1x_2 = \dfrac{p}{25}$

Reemplazamos en (I):

$2\dfrac{p}{25} = \left(\dfrac{7}{5}\right)^2 - 1$

$\dfrac{2p}{25} = \dfrac{49 - 25}{25}$

$p = 12$

Clave A

30. Sean los cuatro números enteros positivos consecutivos:

$x - 2,\ x - 1,\ x,\ x + 1$

Del enunciado:

$x^2 + (x - 1)^2 = 221$

$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 221$

$2x^2 - 2x - 220 = 0$

$x^2 - x - 110 = 0$

x +10

x –11

$(x + 10)(x - 11) = 0$

$x = -10 \;\vee\; x = 11$

El menor número: $x - 2 = 11 - 2 = 9$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 82) Unidad 3

Comunicación matemática

1. $\sqrt{2} \geq 3$ (V)

$0 \geq 0$ (V)

$-1 < 0$ (V)

$\pi \geq 3{,}14$ (V)

Clave B

2. Si $x < 1 \Rightarrow x < 0$

Luego: $x(x < 1)$

$\Rightarrow x^2 > x$ ...(F)

- Si $x > 1$ $(x > 0)$

  $\Rightarrow x \cdot x > 1 \cdot x$

  $x^2 > x$ ...(V)

- $a < b \wedge b < c$

  $\Rightarrow a < c < c + 1$

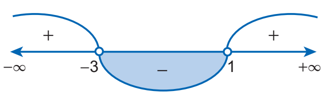
  $\Rightarrow a < c + 1$ ...(F)

Clave D

Razonamiento y demostración

3. $x^2 + 2x - 3 \leq 0$

$(x + 3)(x - 1) \leq 0$



$\therefore\ x \in [-3; 1]$

Clave C

4. $\dfrac{3x}{2} - 3 \leq x + \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{3x - 6}{2} \leq \dfrac{3x + 1}{3}$

$9x - 18 \leq 6x + 2$

$3x \leq 20$

$\Rightarrow x \leq \dfrac{20}{3}$

$\therefore\ x \in \left\langle -\infty; \dfrac{20}{3} \right]$

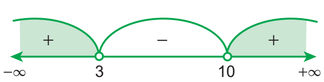
Clave C

5. $x^2 - 13x + 30 > 0$

x ⟶ −3

x ⟶ −10

$(x - 3)(x - 10) > 0$



CS = $\langle -\infty; 3\rangle \cup \langle 10; +\infty\rangle$

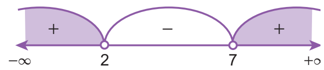
Clave A

6. $x^2 - 9x + 14 > 0$

x ⟶ −7

x ⟶ −2

$(x - 7)(x - 2) > 0$



CS = $\langle -\infty; 2\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$

Clave D

7. $x^2 - 3 \leq 6$

$x^2 \leq 9$

Por propiedad:

$-3 \leq x \leq 3$

$\therefore\ x \in [-3; 3]$

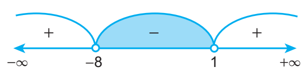
Clave D

8. $x^2 + 7x - 8 \leq 0$

x ⟶ +8

x ⟶ −1

$(x + 8)(x - 1) \leq 0$



CS = $[-8; 1]$

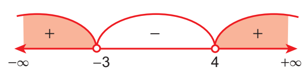
Clave E

9. $x^2 - x - 12 \geq 0$

x ⟶ −4

x ⟶ +3

$(x - 4)(x + 3) \geq 0$



CS = $\langle -\infty; -3] \cup [4; +\infty\rangle$

Clave E

10. $5x^2 - 2x + 10 < 9$

$5x^2 - 2x + 1 < 0$

Analizamos la discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 - 4(5)(1) = -16$

Entonces la expresión pertenece al campo complejo.

$\therefore\ x \in \varnothing$

Clave D

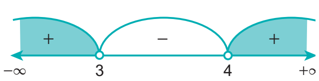
Resolución de problemas

11. $x^2 - 7x + 12 > 0$

x ⟶ −4

x ⟶ −3

$(x - 4)(x - 3) > 0$



Los valores que no cumplen la inecuación son: 3 y 4

Por lo tanto, la suma de estos valores es: 7

Clave B

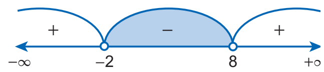
12. $x^2 - 6x < 16$

$x^2 - 6x - 16 < 0$

x ⟶ −8

x ⟶ +2

$(x - 8)(x + 2) < 0$



{−1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}

Por lo tanto; la suma de valores del CS es: 27

Clave D

Nivel 2 (página 82) Unidad 3

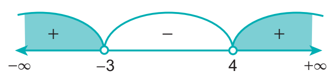
Comunicación matemática

13.

Clave C

14. $(x + 3)(x - 4) \geq 0$

Puntos críticos: −3 y 4



(*) CS = $\langle -\infty; -3] \cup [4; +\infty\rangle$

(*) Sus raíces son −3 y 4.

$\therefore$ VFF

Clave C

Razonamiento y demostración

15. De la inecuación:

$(a + 1)^2x - a - 1 \geq (a - 1)^2x - a$

Resolvemos: $[(a + 1)^2 - (a - 1)^2]\,x \geq 1$

$4ax \geq 1 \Rightarrow x \leq \dfrac{1}{4a}$; $a < 0$

$\therefore\ x \in \left\langle -\infty; \dfrac{1}{4a} \right]$

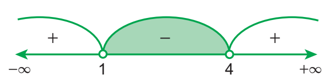
Clave D

16. $0 > x^2 - 5x + 4$

x ⟶ −4

x ⟶ −1

$0 > (x - 4)(x - 1)$



$\therefore$ CS = $\langle 1; 4\rangle$

Los valores enteros: {2; 3}

Nos piden: $2 + 3 = 5$

Clave E

17. $\dfrac{5x - 6}{4} + \dfrac{3x - 4}{2} \geq \dfrac{8 - 7x}{2}$

Desarrollamos cada miembro:

$11x - 14 \geq 16 - 14x$

$25x \geq 30 \Rightarrow x \geq \dfrac{6}{5} = 1{,}2$

El valor que no verifica para x es: 1

Clave B

18. $-1 < \dfrac{4-5x}{3} \leq 7$

Multiplicamos por 3:
$-3 < 4 - 5x \leq 21$

Restamos 4:
$-7 < -5x \leq 17$

Dividimos entre -5:
$\dfrac{7}{5} > x \geq -\dfrac{17}{5} \Rightarrow 1,4 > x \geq -3,4$

Luego:
$\Rightarrow x_{\text{máx. entero}} = 1$

Clave E

19. $\dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{3x-2}{6} > \dfrac{2x+1}{2} + \dfrac{2}{3}$

Reducimos:
$27x - 16 > 30x + 35$
$3x < -51 \Rightarrow x < -17$

$\therefore$ El mayor valor entero es: -18

Clave B

20. $(x-2)^2 \leq 4^2$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros:
$-4 \leq x - 2 \leq 4$
$-2 \leq x \leq 6 \qquad \therefore x \in [-2; 6]$

Clave D

Resolución de problemas

21. Sea la edad de Christian: x (n.° par)

Del enunciado:
$\dfrac{x}{4} + 3 < \dfrac{x}{3} \Rightarrow 3 < \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x}{12}$
$36 < x \qquad ...(1)$

$\dfrac{x}{2} + 5 < 28 \Rightarrow \dfrac{x}{2} < 23$
$x < 46 \qquad ...(2)$

De (1) y (2): $x \in \langle 36; 46\rangle$
Cumplen (n.° pares): {38; 40; 42; 44}

Piden el mayor posible:
$\therefore$ La edad de Christian es 44 años.

Clave E

22. Sea H = n.° de hombres
M = n.° de mujeres

- De los datos, se tiene:
  $H + M < 50 \qquad ...(I)$
  $H > 2M \qquad ...(II)$
- De (II): $H > 2M \Rightarrow H + M > 3M$
  $\Rightarrow 3M < 50 \qquad ...(III)$
- Por condición: $H = \overset{\circ}{10} \wedge M = \overset{\circ}{10}$
  De (III): $\Rightarrow M = 10$
  De (II): $\Rightarrow H = 30$

$\therefore$ El número de hombres es 30.

Clave C

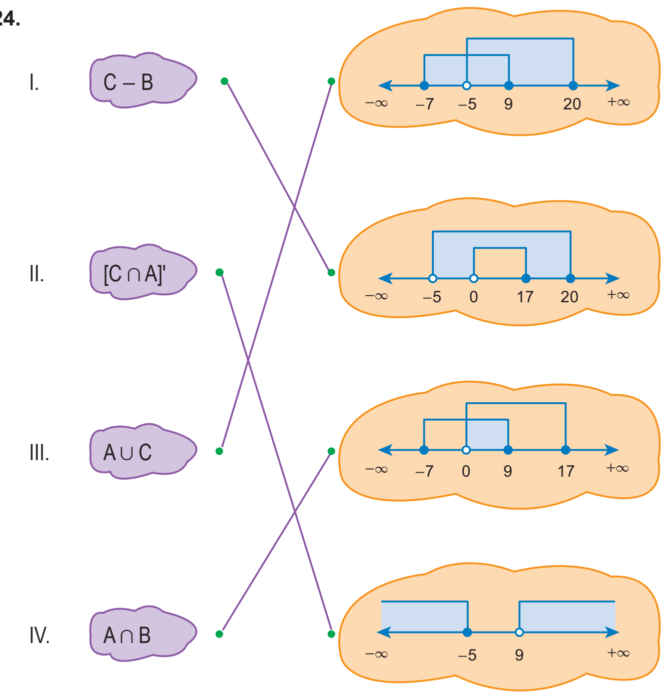
Nivel 3 (página 83) Unidad 3

Comunicación matemática

23. (V) $\langle a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
(F) $\langle m; n\rangle = \{x \in \mathbb{R} / m < x \leq n\}$
(V) $[p; q] = \{x \in \mathbb{R} / p \leq x \leq q\}$
(V) $\langle t; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / t < x\}$
(F) $\langle -\infty; u\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x \leq u\}$

Clave C

24.



$A \cup C = [-7, 20]$

$C - B = \langle -5; 0\rangle \cup [17; 20]$

$A \cap B = \langle 0; 9]$

$[C \cap A]' = \langle -\infty; -5] \cup \langle 9; +\infty\rangle$

Razonamiento y demostración

25. $\dfrac{a}{b}(x-a) \leq x - \dfrac{b}{a}(x-b); \quad a > 0 \;\wedge\; b > 0$

Multiplicamos por ab
$a^2(x-a) \leq abx - b^2(x-b)$
$(a^2 - ab + b^2)x \leq a^3 + b^3$
Multiplicando por a + b
$(a+b)(a^2 - ab + b^2)x \leq (a+b)(a^3 + b^3)$
$(a^3 + b^3)x \leq (a+b)(a^3 + b^3)$
$x \leq a + b$

$\therefore\; x \in \langle -\infty; a + b]$

Como: $a > 0 \;\wedge\; b > 0$
$\Rightarrow ab > 0$
$a + b > 0$
$a^3 + b^3 > 0$

Clave B

26. $\frac{14}{5} < \frac{3x+8}{x+3} < \frac{23}{8}$

$\frac{14}{5} < 3 - \frac{1}{x+3} < \frac{23}{8}$

$-\frac{1}{5} < -\frac{1}{x+3} < -\frac{1}{8}$

$\frac{1}{5} > \frac{1}{x+3} > \frac{1}{8}$

$5 < x+3 < 8$

$2 < \ \ x \ \ < 5$

$x \in \langle 2; 5\rangle = \langle a; b\rangle$

$\Rightarrow a = 2 \wedge b = 5$

$\therefore b - a = 3$

Clave C

27. $\frac{ax - abx}{a} + b - 1 < 0$

$\frac{ax - abx + a(b-1)}{a} < 0$

$\frac{ax(1-b) - a(1-b)}{a} < 0$

$\frac{a(1-b)}{a}(x-1) < 0$ ...(1)

Como: $b > 1 \Rightarrow 1 - b < 0$ ...(2)

Teniendo en cuenta (2) en (1):

$x - 1 > 0 \ \Rightarrow x > 1$

Clave B

28. $x^2 + 2bx + 3a < 0$

Además:

$4b^2 = 12a \Rightarrow b^2 = 3a$

Reemplazamos:

$x^2 + 2bx + b^2 < 0$

$\underbrace{(x+b)^2}_{\text{positivo}} < 0$

$\therefore x \in \varnothing$

Clave D

29. $\underbrace{\frac{7x-2}{2} < \overbrace{\frac{5x+6}{3}}^{} }_{\text{(I)}}\overbrace{< \frac{9x+34}{5}}^{\text{II}}$

Desarrollamos por partes:

(I) $\frac{7x-2}{2} < \frac{5x+6}{3}$

$21x - 6 < 10x + 12$

$11x < 18 \Rightarrow x < \frac{18}{11}$ ...(α)

(III) $\frac{5x+6}{3} < \frac{9x+34}{5}$

$25x + 30 < 27x + 102$

$\Rightarrow x > -36$ ...(β)

$(\alpha) \cap (\beta)$:

$x \in \left\langle -36; \frac{18}{11}\right\rangle$

Clave D

Resolución de problemas

30. $\underbrace{x + 1 < 2x + 7}_{\text{(I)}} \overbrace{< 4x + 9}^{\text{II}}$

De (I):

$x + 1 < 2x + 7 \Rightarrow x > -6$

De (II):

$2x + 7 < 4x + 9 \Rightarrow x > -1$

(I) ∩ (II): $x > -1$

$\Rightarrow x \in \langle -1; +\infty\rangle$

Según dato el conjunto solución es:

$\langle m; +\infty\rangle$

$\therefore \ m = -1$

Nos piden el máximo valor de x en:

$4^{m+3} \geq 128^{x-3}$

$(2^2)^2 \geq (2^7)^{x-3}$

$2^4 \geq 2^{7x-21}$

$\Rightarrow 4 \geq 7x - 21$

$x \leq \frac{25}{7}$

$x \leq 3{,}57$

$\therefore \ x_{máx} = 3$

Clave C

31. De la inecuación:

$ax^2 + ax + \frac{1}{2} \leq 0; \ a > 0$

Como posee solución única, entonces:

$a^2 - 4a\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$a^2 - 2a = 0$

$a(a-2) = 0 \Rightarrow \ a = 0 \ \vee \ a = 2$

Solo cumple para a = 2.

Reemplazando:

$2x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$

$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Nos piden: $a + x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Clave A

32. $\frac{2x+11}{x+6} + 1 \leq k$

$2 - \frac{1}{x+6} + 1 \leq k$

$3 - \frac{1}{x+6} \leq k$ ...(1)

Como: $x \in [2; 4]$

$\Rightarrow 2 \leq x \leq 4$

$8 \leq x + 6 \leq 10$

$\frac{1}{10} \leq \frac{1}{x+6} \leq \frac{1}{8}$

$\frac{29}{10} \geq 3 - \frac{1}{x+6} \geq \frac{23}{8}$

$2{,}9 \geq 3 - \frac{1}{x+6} \geq \frac{23}{8}$ ...(2)

De (1) y (2):

$\therefore k = 2{,}9$

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 85)

1.

A) $\frac{4}{a} \neq \frac{-2}{1} \ \Rightarrow a \neq -2$

B) $4x - 2y = 6$
$2x + y = 11$
Luego:
$y = 4$
$x = 3{,}5 \ \Rightarrow \ x + y = 7{,}5$

C) Si $x = y$:
$4x - 2x = 6 \ \Rightarrow \ x = 3$
$a(3) = 8$
$\Rightarrow \ a = 8/3$

2. Sea x la cantidad de polos de S/.35 e y la cantidad de polos de S/.25, de las premisas:

$x + y = 50$ ... (1)

$35x + 25y = 1480$ ... (2)

Restamos: (2) – 25 × (1) :

$10x = 230$

$\therefore \ x = 23$

Clave C

3. Para que tenga raíces distintas:

$\Delta > 0$

$\Rightarrow (-2(m-2))^2 - 4(9)m^2 > 0$

$4m^2 - 16m + 16 - 36m^2 > 0$

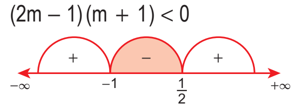
$32m^2 + 16m - 16 < 0$

$4m^2 + 2m - 2 < 0$

2m ⟍⟋ –1
2m ⟋⟍ 2

$(2m-1)(2m+2) < 0$

$(2m-1)(m+1) < 0$



$\therefore \ m \in \left\langle -1; \frac{1}{2}\right\rangle$

Clave D

4. $\underbrace{(x+2)^2}_{\substack{\text{Área}\\\text{errada}}} = \underbrace{(x)^2}_{\substack{\text{Área}\\\text{real}}} + 64$

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 64$

$4x = 60$

$\therefore \ x = 15 \text{ m}$

Clave E

5. Si $x = y \Rightarrow$ reemplazamos:

$$\begin{aligned} 8x + mx &= 90 \\ mx - 3x &= 24 \\ \hline 11x &= 66 \\ x &= 6 \end{aligned} \quad (-)$$

Reemplazamos en una de las ecuaciones:

$48 + m(6) = 90$

$6m = 42$

$\therefore\ m = 7$

Clave B

6. Si $2A = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 4x-2y \\ 2 & 2y+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 20 \\ 2 & 2y+4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow z = 14;\ 4x - 2y = 20 \wedge 2y + 2x = 2y + 4$

$x = 2$

$8 - 20 = 2y$

$y = -6$

$\therefore\ x + y + z = 2 - 6 + 14 = 10$

Clave C

7. Son correctas: I; II y III.

Clave C

8. $\frac{3x}{2} - 2 > \frac{x+5}{7}$

Operando:

$21x - 28 > 2x + 10$

$19x > 38$

$x > 2$

$\Rightarrow x \in \langle 2; +\infty \rangle$

Clave A

9.

I. $7x + \frac{2}{3} > 3x + 6$

$21x + 2 > 9x + 18$

$12x > 16$

$x > 4/3$

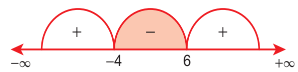
II. $\frac{x^2}{3} < 8 + \frac{2x}{3}$ por (3).

$x^2 < 24 + 2x$

$x^2 - 2x - 24 < 0$

x ⟋ −6
x ⟍ 4

$(x - 6)(x + 4) < 0$



$-4 < x < 6$

(I) ∩ (II):

$x \in \left\langle \frac{4}{3}; 6 \right\rangle \Rightarrow x \in \mathbb{Z}: 2; 3; 4; 5$

$\therefore$ x posee 4 valores enteros.

Clave E

10. Formamos la ecuación cuadrática:

$x^2 - sx + p = 0$

↓ Suma de raíces ↓ Producto de raíces

$x^2 - (2 + 5)x + (2\ .\ 5) = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

Clave D

11. Piden: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

Por Cardano:

$x_1 + x_2 = -4 \quad \wedge \quad x_1x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1^2 + x_2^2 + \underbrace{2x_1x_2}_{1} = 16 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = 15$

Reemplazamos en lo que piden:

$(-4)(15 - \frac{1}{2}) = -58$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 90) Unidad 4

Comunicación matemática

1. EL CUADRADO DEL VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL ES IGUAL AL CUADRADO DE DICHO NÚMERO REAL.

2. De las proposiciones:

I. $|a + b| = -x \Rightarrow x \leq 0$ ...(V)

II. $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|;\ x \in \mathbb{R}$ ...(V)

III. $|2x - 2| = 2|x - 1|$ ...(V)

Clave A

Razonamiento y demostración

3. $|x^2 - x + 2| > x + 10$

Analizamos el discriminante:

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(2) < 0$

Entonces:

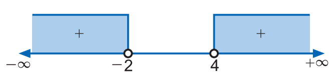
$x^2 - x + 2 > x + 10$

$x^2 - 2x - 8 > 0$

x ╲╱ −4
x ╱╲ 2

$(x-4)(x+2) > 0$

Luego:



$\therefore\ x \in \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$

Clave E

4. $|3x^2 + 4| + |2x - 7| > 2$

$3x^2 + 4 + |2x - 7| > 2$

$|2x - 7| > -4 - 3x^2$

Redefiniendo:

$|2x - 7| \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

Clave D

5. $|3x - 1| \leq 5$

Por teorema:

$-5 \leq 3x - 1 \leq 5$

$-4 \leq 3x \leq 6$

$-\frac{4}{3} \leq x \leq 2$

$\therefore x \in \left[-\frac{4}{3}; 2\right]$

Clave A

6. $|2x + 4| = |x - 10|$

$2x + 4 = x - 10 \quad \vee \quad 2x + 4 = -x + 10$

$x = -14 \qquad 3x = 6$

$x = 2$

$CS = \{-14; 2\}$

Clave B

7. De la ecuación:

$|\sqrt{9x^2} - 6| = 0 \Rightarrow \sqrt{9x^2} - 6 = 0$

$3|x| - 6 = 0 \Rightarrow |x| = 2$

$\Rightarrow x = 2 \ \vee\ x = -2$

$x_{máx.} = 2$

Clave E

8. De la ecuación:

$||2x| + 4| = 9 + \sqrt{x^2}$

$\underbrace{||2x| + 4|}_{+} = 9 + |x|$

$|2x| + 4 = 9 + |x|$

$|x| = 5$

$\Rightarrow x = 5 \quad \vee \quad x = -5$

$CS = \{-5; 5\}$

Clave E

9. De la ecuación:

$\left|\frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{1}{1,5-x}\right|$

$|1 - x| = |1,5 - x|$

Elevamos al cuadrado:

$(x - 1,5)^2 - (x - 1)^2 = 0$

$(x^2 - 3x + 1,5^2) - (x^2 - 2x + 1) = 0$

$1,5^2 - x - 1 = 0$

$1,25 - x = 0$

$x_0 = 1,25$

Nos piden:

$4x_0 - 1 = 4(1,25) - 1 = 4$

Clave E

10. De la ecuación:

$||x - 3| - 5| = 0 \ \Rightarrow\ |x - 3| - 5 = 0$

$|x - 3| = 5$

$x - 3 = 5 \quad \vee \quad x - 3 = -5$

$x_1 = 8 \quad \vee \quad x_2 = -2$

Nos piden:

$x_1 + x_2 = 6$

Clave C

11. De la inecuación: $|2x + 5| \geq 7$

Recuerda: $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a\ \vee\ x \leq -a$

Luego:

$2x + 5 \geq 7\ \vee\ 2x + 5 \leq -7$

$x \geq 1 \ \vee \qquad x \leq -6$

$x_{máx.}\ \mathbb{Z}^- = -6$

Clave E

Resolución de problemas

12. Del enunciado, establecemos la siguiente ecuación con valor absoluto.

$$||x^2 - x| - x| = x$$

Según la definición:

$x \geq 0 \wedge \{|x^2 - x| - x = x \vee |x^2 - x| - x = -x\}$

$x \geq 0 \wedge \{|x^2 - x| = 2x \vee |x^2 - x| = 0\}$

$x \geq 0 \wedge \{x^2 - x = 2x \vee x^2 - x = -2x$
$\vee\ x(x - 1) = 0\}$

$x \geq 0 \wedge \{x^2 - 3x = 0 \vee x^2 + x = 0 \vee$
$x = 0 \vee x = 1\}$

$x \geq 0 \wedge \{x(x - 3) = 0 \vee x(x + 1) = 0 \vee x$
$= 0 \vee x = 1\}$

$x \geq 0 \ \wedge\ \{x = 0 \vee x = 3 \ \vee\ x = 0 \vee$
$x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1\}$

CS = {0; 1; 3}

Nos piden: $0 + 1 + 3 = 4$

Clave D

13. Según el enunciado:

$$||x| - 2| + 1| = 4$$

Por definición

$||x| - 2| + 1 = 4 \ \vee\ ||x| - 2| + 1 = -4$

$||x| - 2| = 3 \ \vee\ ||x| - 2| = -5$

$|x| - 2 = 3 \ \vee\ |x| - 2 = -3 \ \vee\ x \in \varnothing$

$|x| = 5 \ \vee\ |x| = -1 \ \vee\ x \in \varnothing$

$x = 5 \ \vee\ x = -5 \ \vee\ x \in \varnothing \ \vee\ x \in \varnothing$

CS = {–5; 5}

Nos piden: $-5 + 5 = 0$

Clave E

Nivel 2 (página 90) Unidad 4

Comunicación matemática

14.

	4	3	2	
2	3	2	1	3
3	1	1	3	1
2	1	4	2	4
	3	3	2	

15. I. AEC DBF   II. FEC DBA   III. BEC DFA

IV. BEA DFC

2	–5	–2
9	3	–1

Nos piden:
$|2 + 9| = 11$
$|-1 - 2| = 3$

Razonamiento y demostración

16. $\frac{x}{2} = |x| - 1$

$\frac{x}{2} + 1 = |x| \ \Rightarrow\ \frac{x}{2} + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$\frac{x}{2} + 1 = x \quad \vee \quad \frac{x}{2} + 1 = -x$

$\frac{x}{2} = 1 \qquad \frac{3x}{2} = -1$

$x = 2 \qquad x = -\frac{2}{3}$

$\therefore\ 2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{6 - 2}{3} = \frac{4}{3}$

Clave C

17. $|x^2 - 2| = 2 - 3x \geq 0$ ...(1)

$2 - 3x \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \geq x$ ...(2)

De (1):

$x^2 - 2 = 2 - 3x \ \vee\ x^2 - 2 = -2 + 3x$

$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x = 0$

x ⤫ 4 $\qquad x(x - 3) = 0$
x ⤫ –1

$\Rightarrow (x = 1 \ \vee\ x = -4) \vee (x = 0 \ \vee\ x = 3)$ ...(3)

De (2) y (3):

$\therefore$ CS = {–4; 0}

Clave D

18. $|2x + 1| = 3|x - 1|$

$2x + 1 = 3x - 3 \quad \vee \quad 2x + 1 = -3x + 3$

$4 = x \quad \vee \quad 5x = 2$

$x = \frac{2}{5}$

$\therefore$ CS = $\left\{\frac{2}{5}; 4\right\}$

Clave E

19. $|x^2 + x - 12| = 3 - x \geq 0$ ...(1)

$3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$

De (1):

$x^2 + x - 12 = 3 - x \ \vee\ x^2 + x - 12 = -3 + x$

$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 9 = 0$

x ⤫ + 5 $\qquad (x - 3)(x + 3) = 0$
x ⤫ – 3

$\Rightarrow (x = -5 \ \vee\ x = 3) \vee (x = 3 \vee x = -3)$

$\therefore$ CS = {–5; –3; 3}

Clave C

20. $|x - 1| = x^2 - x - 1$

Sea: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ ...(1)

Luego:

$x - 1 = x^2 - x - 1$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0 \ \vee\ x = 2$ ... (α)

De (1) $\wedge$ (α): $x = 2$

Sea: $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$ ...(2)

$1 - x = x^2 - x - 1$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2}$ ...(β)

De (2) ∧ (β): $x = -\sqrt{2}$

Luego: $x = \{-\sqrt{2}\,; 2\}$

Clave B

21. $|5 - x^{-1}| < 1$

Por teorema: $-1 < 5 - x^{-1} < 1$

Restamos 5: $-6 < -x^{-1} < -4$

Multiplicamos por (–1):

$6 > x^{-1} < 4$

$6 > \frac{1}{x} > 4$

Invertimos: $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$

$\therefore x \in \left\langle \frac{1}{6}; \frac{1}{4} \right\rangle$

Clave C

22. De la inecuación:

$|2x - 3| \leq 3x - 8$

Por teorema:

$3x - 8 \geq 0 \wedge \{-(3x - 8) \leq 2x - 3 \leq 3x - 8\}$

$x \geq \frac{8}{3} \wedge \{8 - 3x \leq 2x - 3 \wedge 2x - 3 \leq 3x - 8\}$

$x \geq \frac{8}{3} \wedge \left\{\frac{11}{5} \leq x \wedge 5 \leq x\right\}$

$x \geq 5$

$x \in [5; +\infty\rangle$

Clave B

23. $|x - 2| \leq 2x$

$-2x \leq x - 2 \leq 2x$

$-2x \leq x - 2 \quad \wedge \quad x - 2 \leq 2x$

$-3x \leq -2 \quad \wedge \quad 2x - x \geq -2$

$x \geq \frac{2}{3} \quad \wedge \quad x \geq -2$



$\therefore x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right\rangle$

Clave C

24. $\frac{|x| + |x + 6|}{|x + 3|} \leq 2x - 5$

Se observa : $2x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$ ...(I)

Luego:

$\frac{x + x + 6}{x + 3} \leq 2x - 5$

$\frac{2(x + 3)}{x + 3} \leq 2x - 5 \Rightarrow x \geq \frac{7}{2}$ ...(II)

(I) ∩ (II): $x \geq \frac{7}{2}$

$\therefore x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right\rangle$

Clave E

Resolución de problemas

25. La ecuación es: $\frac{x^2 - 4}{|x + 3|} = \frac{3}{2}x$

Dependiendo del signo de (x + 3), se pueden analizar dos casos:

A) $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$; entonces:

$$\frac{x^2 - 4}{x + 3} = \frac{3}{2}x$$

Simplificamos la ecuación:

$x^2 + 9x + 8 = 0$

$(x + 1)(x + 8) = 0$

$\Rightarrow x = -1 \vee x = -8$

Pero $x > -3$, solo cumple $x = -1$

B) $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ (x es negativo)

$$\frac{\overbrace{x^2 - 4}^{+}}{\underbrace{|x + 3|}_{+}} = \frac{3}{2}x \Rightarrow \text{absurdo}$$

∴ La ecuación solo presenta una raíz real.

Clave B

26. Analizamos los conjuntos:

X: $-4 < x^2 - 5x < 4$

$x^2 - 5x + 4 > 0 \wedge x^2 - 5x - 4 < 0$

$(x - 4)(x - 1) > 0 \wedge \frac{5 - \sqrt{41}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$

$(x < 1 \vee x > 4) \wedge \frac{5 - \sqrt{41}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$

$\frac{5 - \sqrt{41}}{2} < x < 1 \vee 4 < x < \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$

Y: $-2 \leq x^2 - 5x + 6 \leq 2$

$x^2 - 5x + 8 \geq 0 \wedge x^2 - 5x + 4 \leq 0$

$x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 5x + 4 \leq 0$

$x \in \mathbb{R} \wedge (x - 4)(x - 1) \leq 0$

$x \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq x \leq 4$

$1 \leq x \leq 4$

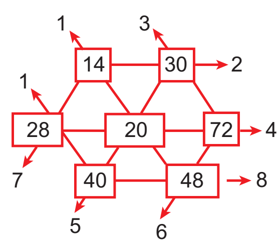
Luego: $X \cap Y = \varnothing$

Clave A

Nivel 3 (página 92) Unidad 4

Comunicación matemática

27.



28. $|x| = |y| \Rightarrow x = y \vee x = -y$

$|x - a + b| = |x + a - b|$

$x - a + b = x + a - b \vee x - a + b = -x - a + b$

$\Rightarrow b = a \vee 2x = 0$

$x = 0$

Clave D

Razonamiento y demostración

29. $|x|x \le 1$

- Sea: $x \ge 0$ ...(I)

  $x^2 \le 1$

Por propiedad: $-1 \le x \le 1$ ...(II)

(I) ∩ (II): $0 \le x \le 1$ ...(α)

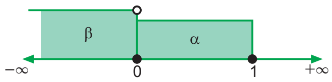
- Sea $x < 0$ ...(III)

  $-x^2 \le 0 \Rightarrow x^2 \ge 0$

  $x \in \mathbb{R}$ ...(IV)

(III) ∩ (IV): $x < 0$ ...(β)

Finalmente: $\alpha \cup \beta$



$\therefore\ x \in \langle -\infty; 1]$

Clave D

30. $||x^2 + x + 1| - x^2| + |x + 1| = 2$

$|x^2 + x + 1 - x^2| + |x + 1| = 2$

$|x + 1| + |x + 1| = 2$

$2|x + 1| = 2$

$|x + 1| = 1$

Luego:

$x + 1 = 1 \quad \vee \quad x + 1 = -1$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$

$\therefore\ CS = \{-2; 0\}$

Clave B

31. $|2x - 1| < |x - 2|$

Elevamos al cuadrado a ambos miembros:

$(2x - 1)^2 < (x - 2)^2$

$(2x - 1)^2 - (x - 2)^2 < 0$

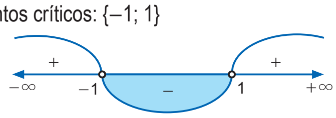
Aplicamos diferencia de cuadrados:

$(3x - 3)(x + 1) < 0$

$3(x - 1)(x + 1) < 0$

$(x - 1)(x + 1) < 0$

Puntos críticos: $\{-1; 1\}$



$x = \langle -1; 1\rangle = \langle a; b\rangle$

$\Rightarrow a = -1 \wedge b = 1$

$\therefore\ a + b = 0$

Clave B

32. $\sqrt{2x - 6} + \sqrt{12 - |x|} > 0$

Analizamos:

$2x - 6 \ge 0 \wedge 12 - |x| \ge 0$

$x \ge 3 \wedge |x| \le 12$

$x \ge 3 \wedge -12 \le x \le 12$

$\Rightarrow 3 \le x \le 12$

$x \in \mathbb{Z};\ x \in \{3; 4; 5; ...; 12\}$

Nos piden: $3 + 4 + 5 + ... + 12 = 75$

Clave B

33. De la inecuación:

$x^2 - 2|x| - 15 \le 0$

$|x|^2 - 2|x| - 15 \le 0$

$|x| \quad -5$

$|x| \quad 3$

$(|x| - 5)\underbrace{(|x| + 3)}_{+} \le 0$

$|x| - 5 \le 0 \Rightarrow |x| \le 5$

$\Rightarrow -5 \le x \le 5$

$\therefore x \in [-5; 5]$

Clave C

34. $|2x - 1| < |x + 3|$

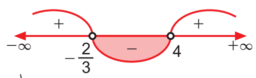
Elevamos al cuadrado:

$(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 < 0$

$(2x - 1 - x - 3)(2x - 1 + x + 3) < 0$

$(x - 4)(3x + 2) < 0$

Graficando:



$\therefore\ x \in \left\langle -\frac{2}{3}; 4 \right\rangle$

Clave B

35. $\left|\frac{x - 1}{x + 2}\right| > 2$

$|x - 1| > 2|x + 2|; \quad x + 2 \ne 0$

$x \ne -2$

Elevamos al cuadrado:

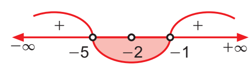
$(x - 1)^2 - (2x + 4)^2 > 0$

$(x - 1 - 2x - 4)(x - 1 + 2x + 4) > 0$

$(-x - 5)(3x + 3) > 0$

$(x + 5)(3x + 3) < 0$

Graficamos:



$\therefore\ x \in \langle -5; -1\rangle - \{-2\}$

Clave D

36. $2x^2 - 7|x| + 3 \ge 0$

Recuerda: $|x|^2 = x^2$

$2|x|^2 - 7|x| + 3 \ge 0$

$2|x| \quad -1$

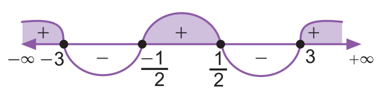
$|x| \quad -3$

$(2|x| - 1)(|x| - 3) \ge 0$

$2|x| - 1 = 0 \quad \wedge \quad |x| - 3 = 0$

$|x| = 1/2 \quad \wedge \quad |x| = 3$

$x = \pm 1/2 \quad \wedge \quad x = \pm 3$



Tomaremos las zonas positivas:

$CS = \left\langle -\infty; -3\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup \left[3; +\infty\right\rangle$

Clave E

Resolución de problemas

37. $f(x) = \dfrac{5\left(x+\frac{3}{5}\right)(x-2)}{x+\frac{3}{5}} \wedge x \in \left\langle -\frac{3}{5}; \frac{3}{5} \right]$

$\Rightarrow f(x) = 5x - 10$

Por dato: $-\frac{3}{5} < x \leq \frac{3}{5}$

$\Rightarrow -3 < 5x \leq 3$

$\Rightarrow -13 < 5x - 10 \leq -7$

$\Rightarrow 7 \leq \underbrace{|5x - 10|}_{|f(x)|} < 13$

$\therefore$ El rango de $|f(x)|$ es $[7; 13\rangle$

Clave D

38. Nos piden: $A - B$

$A = \{x \in \mathbb{R} / |x - |x|| \leq 1\}$ y

$B = \{x \in A / |x - |x| - 1| \leq 1\}$

Veamos: **Para el conjunto A:**

$|x - |x|| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x - |x| \leq 1$

- Si $x \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x - x \leq 1$ ...(1)

  $-1 \leq 0 \leq 1$
- Si $x < 0 \Rightarrow -1 \leq x - (-x) \leq 1$

  $-1 \leq 2x \leq 1$

  $\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \wedge x < 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right\rangle$ ...(2)

De (1) y (2): $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

$\therefore A = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

Para el conjunto B:

$x \in A \wedge |x - |x| - 1| \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq x - |x| - 1 \leq 1$

$0 \leq x - |x| \leq 2$

- Si $x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x - x \leq 2$

  $\Rightarrow x \geq 0 \wedge x \in A$

  $\underbrace{x \geq 0 \ \wedge \ x \geq -\frac{1}{2}}$

  $\Rightarrow x \geq 0$ ...(3)
- Si $x < 0 \Rightarrow 0 \leq x - (-x) \leq 2$

  $0 \leq 2x \leq 2$

  $0 \leq x \leq 1$

  Como $x < 0 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 1$

  $\Rightarrow x \in \varnothing$ ...(4)

  Entonces de (3) y (4):

  $B = [0; +\infty\rangle$

  $\therefore A - B = \left[-\frac{1}{2}; 0\right\rangle$

Clave D

LOGARITMOS

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 95) Unidad 4

Comunicación matemática

1. I. $a^{\log_a b} = b; b > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$ (F)

II. $\log_5 12 - \log_5 4 = \log_5 \frac{12}{4} = \log_5 3$ (F)

III. $\log_4 6 = \log_4 36^3 = \log_{64} 216$ (V)

Solo III es verdadero.

Clave B

2.

Clave D

Razonamiento y demostración

3. $\log_3(3n^2 + 2n + 11) = 3$

$3^3 = 3n^2 + 2n + 11$

$3n^2 + 2n - 16 = 0$

$3n \quad +8$
$n \quad -2$

$(3n + 8)(n - 2) = 0$

$3n + 8 = 0 \Rightarrow n = -\frac{8}{3}$

$n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$

Clave A

4. $R = \log_9 27 + \log_4 16$

$\Rightarrow R = \log_{3^2} 3^3 + \log_{2^2} 2^4$

$\therefore R = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$

Clave C

5. $n\log n = 3\log 36 \Rightarrow \log n^n = \log 36^3$

$m\log m = \log 256 \Rightarrow \text{Log}m^m = \text{Log}4^4$

Sumamos:

$\log n^n + \log m^m = \log 6^6 + \log 4^4$

$\log n^n \,.\, m^m = \log 6^6 \,.\, 4^4$

$\Rightarrow m^m \,.\, n^n = 6^6 \,.\, 4^4$

$\Rightarrow m = 6 \wedge n = 4 \vee \; m = 4 \wedge n = 6$

Nos piden: $\log(n + m) = \log(4 + 6) = \log 10 = 1$

Clave B

6. $\log_2 n + \log_2\left(1 + \frac{5}{n}\right) + \log_2\left(1 + \frac{3}{n+5}\right) + \log_2\left(1 + \frac{4}{n+8}\right) = 6$

Reducimos:

$\log_2 n\left(\frac{n+5}{n}\right)\left(\frac{n+8}{n+5}\right)\left(\frac{n+12}{n+8}\right) = 6$

$\log_2(n + 12) = 6 \Rightarrow n + 12 = 2^6$

$n + 12 = 64 \Rightarrow n = 52$

Clave C

7. $x^{\log_x x^3} + 27x^{\log_x x} = 9x^{\log_x x^2} + 27$

Por Identidad:

$x^3 + 27x = 9x^2 + 27$

$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$

$\underbrace{x^3 - 3x^2 \,.\, 3 + 3x \,.\, 3^2 - 3^3}_{(x-3)^3} = 0$

$(x - 3)^3 = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Clave C

8. $E = \sqrt[\log_d a]{\sqrt[\log_c d]{\sqrt[\log_b c]{\sqrt[\log_a b]{n^{\frac{\log 5}{\log n}}}}}}$

Reducimos:

$E = \sqrt[\log_d a \log_c d \log_b c \log_a b]{n^{\log_n 5}}$

$E = \sqrt[\log_a b \log_b c \log_c d \log_d a]{5}$

$\therefore \; E = \sqrt[\log_a a]{5} = 5$

Clave D

9. De la igualdad:

$\log\left(\frac{p^2 + q^2}{2}\right) = \log p + \log q = \log pq$

$p^2 + q^2 = 2pq$

$(p - q)^2 = 0 \Rightarrow p = q$

Nos piden:

$\log_q p + \log_p q + 20 = \underbrace{\log_q p}_{1} + \underbrace{\log_q p}_{1} + 20 = 22$

Clave A

10. $E = \log_6 216 + \log_8 64 + \log_{13} 169 + \log_{2010} 2010$

$E = \log_6 6^3 + \log_8 8^2 + \log_{13} 13^2 + 1$

$E = 3 + 2 + 2 + 1$

$\therefore E = 8$

Clave B

Resolución de problemas

11. Dato: $ab = 1$

$k = a^{\log_b 0,5} + b^{\log_a 0,2}$

$k = 0,5^{\log_b a} + 0,2^{\log_a b}$

$k = 0,5^{\log_b b^{-1}} + 0,2^{\log_a a^{-1}}$

$k = 0,5^{-1} + 0,2^{-1} \Rightarrow k = 7$

Clave E

12. Según el enunciado:

b la base

N el número

$\log_b N \; ; \; \log_b \sqrt[3]{N}$

$\frac{b}{N} = \frac{\log_b N}{\log_b \sqrt[3]{N}} \Rightarrow \frac{b}{N} = 3$

$b = 3N$

Por condición del problema:

$b + \log_b N = 3N + \frac{1}{7}$

$\Rightarrow \log_b N = \frac{1}{7}$

$$\log_b \frac{b}{3} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{b}{3} = b^{\frac{1}{7}}$$

$$b^{1-\frac{1}{7}} = 3$$

$$b^{\frac{6}{7}} = 3$$

$$b = 3\sqrt[6]{3}$$

Clave C

Nivel 2 (página 95) Unidad 4

Comunicación matemática

13.

- $\log_2 x^2 \neq \frac{1}{2}$ (F)
- $\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_b x$

  $\log_b x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_b x$ (V)
- $\log_6 25 - \log_6 25 \neq 1$ (F)
- $\log_2 3^5 + 5\log_2 3 = 10\log_2 3$

  $5\log_2 3 + 5\log_2 3 = 10\log_2 3$ (V)

Clave D

14.

$\frac{1}{4}$	$>$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{3}$	$<$	$\frac{1}{2}$
2	$=$	2
0	$<$	1

Razonamiento y demostración

15. $a = \log_2 b$ ...(1)

$b = \log_2 c$ ...(2)

$c = \log_2 d$ ...(3)

$b\,c\,d = 128$ ...(4)

$b + c = 6$ ...(5)

(2) y (3) en (5):

$\log_2 c + \log_2 d = 6$

$\log_2 cd = 6 \Rightarrow cd = 2^6 = 64$ ...(α)

(α) en (4):

$b \,.\, 64 = 128 \Rightarrow b = 2$

En (5): $2 + c = 6 \Rightarrow c = 4$

En (1):

$a = \log_2 b = \log_2 2 = 1$

Nos piden: $J = \sqrt[a+b]{c\,.\,d} = \sqrt[3]{64} = 4$

Clave C

16. $4\log_7\left(\frac{a}{2}\right) + 3\log_7\left(\frac{a}{3}\right) = 5\log_7 a - \log_7 27$

$$\log_7\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \log_7\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \log_7 a^5 - \log_7 27$$

Reducimos:

$$\log_7\left(\frac{a}{2}\right)^4\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \log_7\left(\frac{a^5}{27}\right)$$

Luego:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^4\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^5}{27}$$

$$\frac{a^7}{2^4 . 3^3} = \frac{a^5}{3^3} \Rightarrow a^2 = 2^4$$

$\therefore a = 2^2 = 4$

Clave B

17. Reduciendo:

$$\sqrt[3]{5^{\frac{1}{\log_7 5}} + \frac{1}{\sqrt{-\log\left(\frac{1}{10}\right)}}} = \sqrt[3]{5^{\log_5 7} + \frac{1}{\sqrt{\log 10}}} = \sqrt[3]{7+1} = 2$$

Clave B

18. De la ecuación:

$(2^{2x})^2 - 5(2^{2x}) + 6 = 0$

2^{2x} $\quad -3$

2^{2x} $\quad -2$

$2^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3$

$$x = \frac{\log_2 3}{2}$$

$\therefore 2^{2x} = 2 \Rightarrow x = 1/2$

Clave D

19. Condición:

$x = 8^{\log_{27} x^a}$

$x = 8^{\log_{27^{1/3}}(x^a)^{1/3}} = 8^{1/3\log_3 x^a} = 2^{a\log_3 x}$

Logaritmos en base 3 a ambos miembros:

$\log_3 x = \log_3 2^{a\log_3 x}$

$\log_3 x = a\log_3 x \log_3 2$

$\log_3 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \log_2 3$

Nos piden:

$$\log_{12} 2 = \frac{1}{\log_2 12} = \frac{1}{\log_2 2^2 \cdot 3}$$

$$\log_{12} 2 = \frac{1}{2 + \log_2 3} = \frac{1}{2 + a}$$

Clave C

20. Dato: $\log_4 y = 2$

Además: $\log_4\left(\frac{x^2 . y^3}{16}\right) = 5$

$\log_4 x^2 + \log_4 y^3 - \log_4 16 = 5$

$2\log_4|x| + 3\log_4 y - 2 = 5$

$2\log_4|x| + 3(2) = 7$

$\log_4|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \vee x = -2$

Clave B

21. $P = \log_2 \text{antilog}_2 \text{colog}_2 4$

$P = \log_2 \text{antilog}_2(-\log_2 4)$

$P = \log_2 \text{antilog}_2(-2)$

$P = \log_2 2^{-2} = -2\log_2 2$

$\therefore P = -2$

Clave B

Resolución de problemas

22. Sabemos: $\log_b N^n = n\log_b N \ \wedge\ \log 10 = 1$

Aplicamos:

$n\log(2x-1) + n\log(x-1) = n;\ n \neq 0$

$\log(2x-1) + \log(x-1) = 1$

Recordamos: $\log_b A + \log_b B = \log_b AB;\ A \text{ y } B \in \mathbb{R}^+$

Luego:

$\log(2x-1)(x-1) = \log 10;\ x > 1/2 \wedge x > 1$

$(2x-1)(x-1) = 10$

$(2x-1)(x-1) = (5)(2) \ \therefore\ x = 3$

Clave B

23. Recuerda que **m**; **n** y **p** forman una progresión aritmética y geométrica a la vez si y solo si:

$$m = n = p$$

Según lo dicho hacemos:

II

$(\log_2 A) - 1 = \log_{AB} 2 = 3 - \log_2 B$

I

De I:

$\log_2 A - 1 = 3 - \log_2 B$

$\log_2 A + \log_2 B = 4$

$AB = 2^4 \qquad ...(I)$

De II:

$\log_2 A - 1 = \log_{AB} 2$

$\log_2 A = 1 + \log_{AB} 2$

Reemplazamos: $AB = 2^4$

$\log_2 A = 1 + \log_{2^4} 2$

$\log_2 A = 1 + \log_2 2^{\frac{1}{4}}$

$\log_2 A = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$A = 2^{\frac{5}{4}}$

En (I): $B = 2^{\frac{11}{4}}$

Nos piden: $\log_2\left(\frac{B}{2A}\right) = \log_2\left(\frac{2^{\frac{11}{4}}}{2.2^{\frac{5}{4}}}\right) = \frac{1}{2}$

Clave C

Nivel 3 (página 96) Unidad 4

Comunicación matemática

24. $\log(|x|-1) = 1 + 2\log_{\sqrt[3]{10}}\sqrt{2}$

$\log(|x|-1) = 1 + \log_{10} 2^3$

$\log(|x|-1) = 1 + \log 8$

$\log(|x|-1) = \log 10 + \log 8$

$\log(|x|-1) = \log 80$

$|x| - 1 = 80 \Rightarrow |x| = 81$

Luego: $\sqrt[4]{|x|} - 1 = \sqrt[4]{81} - 1 = 2$

Clave E

25. Usamos propiedades de logaritmos:

I. $\log_4 65 > \log_4 64 \wedge \log_7 49 > \log_7 40$

$\log_4 65 > 3 \wedge 2 > \log_7 40$

$\Rightarrow \log_4 65 > 3 > 2 > \log_7 40 \qquad (V)$

II. $70 > \sqrt{80} \Rightarrow \log_3 70 > \log_3 \sqrt{80}$

$\Rightarrow \log_3 70 > \log_9 80 \qquad (V)$

III. $\log\sqrt{4} = \log_{100} 4 \Rightarrow \log\sqrt{4} = \log_{10} 2$

$\Rightarrow \sqrt{4} = 2 \qquad (V)$

IV. $\log_3 25 < \log_3 27 \wedge \log_4 64 < \log_4 67$

$\log_3 25 < 3 \wedge 3 < \log_4 67$

$\log_3 25 < 3 < \log_4 67 \qquad (V)$

$\therefore$ Todas son verdaderas.

Clave A

Razonamiento y demostración

26. $\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^{-1}} x + \log_{2^{\frac{1}{2}}} x = \frac{15}{2}$

$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + -\log_2 x + \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2 x = \frac{15}{2}$

$\log_2 x\left(1 + \frac{1}{2} - 1 + 2\right) = \frac{15}{2}$

$\log_2 x \,.\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{2}$

$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3$

$\therefore\ x = 8$

Clave A

27. Dato: $x = \sqrt[10]{3} \qquad ...(I)$

$E = \log_x(3^{\log_{\sqrt{3}} x} + 4^{\log_2 x} + 6^{\log_{\sqrt{6}} x})$

$E = \log_x\left(3^{\log_3 x^2} + 4^{\log_4 x^2} + 6^{\log_6 x^2}\right)$

Por propiedad se tiene:

$E = \log_x (x^2 + x^2 + x^2)$

$E = \log_x 3x^2 = \log_x 3 + \log_x x^2$

Reemplazamos (I):

$\therefore E = \log_{\sqrt[10]{3}} 3 + 2 = 10 + 2 = 12$

Clave E

28. $2^{\log_7(x^2-7x+21)} = 3^{\log 7 4}$

Intercambiamos:

$2^{\log_7(x^2-7x+21)} = 4^{\log_7 3} = (2^2)^{\log_7 3}$

$2^{\log_7(x^2-7x+21)} = 2^{2\log_7 3}$

$\log_7(x^2-7x+21) = 2\log_7 3 = \log_7 3^2$

$x^2 - 7x + 21 = 3^2 = 9$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$x \quad -4$

$x \quad -3$

$\Rightarrow x = 4 \ \vee\ x = 3$

$\therefore x_{máx.} = 4$

Clave B

29. $J = \sqrt[3]{25^{\log_5 3} + 81^{\log_3 2} + \sqrt[3]{2}^{\log_4 64}}$

$J = \sqrt[3]{(5^2)^{\log_5 3} + (3^4)^{\log_3 2} + \sqrt[3]{2}^{\log_4 4^3}}$

$J = \sqrt[3]{(5^{\log_5 3})^2 + (3^{\log_3 2})^4 + (\sqrt[3]{2})^3}$

$\therefore J = \sqrt[3]{3^2 + 2^4 + 2} = \sqrt[3]{27} = 3$

Clave B

30. Dato:

$\log_3 x^2 = a \Rightarrow \log_9 x = a/4$

$\log_3 y^2 = b \Rightarrow \log_9 y = b/4$

Nos piden:

$S = 20\log_9 \sqrt[10]{\frac{x}{y}} = \frac{20}{10}\log_9\left(\frac{x}{y}\right)$

$S = 2[\log_9 x - \log_9 y]$

Reemplazamos:

$S = 2\left[\frac{a}{4} - \frac{b}{4}\right] = \frac{a-b}{2}$

Clave D

31. Analizamos:

$f(x) = \log(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$

$x - 4 \geq 0 \wedge 6 - x \geq 0 \wedge \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} > 0$

$x \geq 4 \wedge x \leq 6 \wedge (\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})^2 > 0$

$x \geq 4 \wedge x \leq 6 \wedge 2(\sqrt{(x-4)(6-x)}) + 2 > 0$

$4 \leq x \leq 6 \wedge 2\sqrt{(x-4)(6-x)} > -2$

$4 \leq x \leq 6 \wedge 2\sqrt{(x-4)(6-x)} \geq 0$

$4 \leq x \leq 6 \wedge (x-4)(x-6) \leq 0$

$4 \leq x \leq 6 \wedge 4 \leq x \leq 6$

$x \in [4; 6]$

Clave B

32. Efectuamos:

$\frac{3}{\log_2 45 + 3} + \frac{2}{\log_2 40 + 2} + \frac{1}{\log_5 72 + 1}$

$= \frac{3}{\log_2 45 + \log_2 8} + \frac{2}{\log_3 40 + \log_3 9} + \frac{1}{\log_5 72 + \log_5 5}$

$= \frac{3}{\log_2 360} + \frac{2}{\log_3 360} + \frac{1}{\log_5 360}$

$= 3\log_{360} 2 + 2\log_{360} 3 + \log_{360} 5$

$= \log_{360} 2^3 + \log_{360} 3^2 + \log_{360} 5$

$= \log_{360} 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = \log_{360} 360 = 1$

Clave C

Resolución de problemas

33. Del término general de la sucesión (a_n); tal que:

$a_n = \log p$, si existe un primo **p** y un **k** entero no negativo tal que $\mathbf{n = p^k}$ y

$a_n = 0$, en cualquier otro caso:

Los divisores de 72 son:

1; 2; 3; 4; 6, 8, 9; 12; 18; 24; 36; 72

$a_1 = \log p$; ($\mathbf{1 = p^0}$; siendo p primo)

$a_2 = \log 2$; $(2 = 2^1)$

$a_3 = \log 3$; $(3 = 3^1)$

$a_4 = \log 2$; $(4 = 2^2)$

$a_6 = 0$

$a_8 = \log 2$; $(8 = 2^3)$

$a_9 = \log 3$; $(9 = 3^2)$

$a_{12} = 0$, $a_{18} = 0$; $a_{24} = 0$; $a_{36} = 0$; $a_{72} = 0$

Nos piden:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{12} + a_{18} + a_{24} + a_{36} + a_{72}$

$= \log p + 3\log 2 + 2\log 3 = \log 72p$

Entonces:

Para **p = 2**; la suma es **log144**

Clave E

34. $P = 2 . (2 . 3) . (2 . 3^2) . (2 . 3^3) ... (2 . 3^9)$

$P = 2^{10}\, 3^{1+2+3+...+9}$

$P = 2^{10}\, 3^{\frac{9(10)}{2}}$

$P = 2^{10}\, 3^{45}$

Sabemos:

$\log_P n = \frac{1}{\log_n P} = \frac{1}{\log_n 2^{10}.3^{45}}$

$= \frac{1}{10\log_n 2 + 45\log_n 3}$

Según el dato:

$\log_2 n = M \wedge \log_2 n = N$

$\log_P n = \frac{1}{\frac{10}{M} + \frac{45}{N}} = \frac{MN}{10N + 45M}$

Clave B

35. $M = \frac{1}{\log_3 3 + \log_3(10e)} + \frac{1}{\log_e e + \log_e(30)} + \frac{1}{\log 10 + \log(3e)} + \frac{1}{\log_3(e)} - 1$

La suma de logaritmo en la misma base es igual al logaritmo del producto.

$M = \frac{1}{\log_3 30e} + \frac{1}{\log_e 30e} + \frac{1}{\log 30e} + \frac{1}{\log_3 e} - 1$

Aplicando la propiedad: $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$

$M = \log_{30e} 3 + \log_{30e} e + \log_{30e} 10 + \log_e 3 - 1$

$M = \log_{30e} 30e + \log_e 3 - 1$

$M = 1 + \log_e 3 - 1$

$M = \log_e 3 = \ln 3$

Clave B

FUNCIONES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 100) Unidad 4

Comunicación matemática

1. VVFVF

Clave A

2.

a) [–5; 6]

b) [–1; 4]

c) $x \in [-5; -3] \Rightarrow$ función lineal $f(x) = ax + b$

d) $f(x) = k$ (constante)

$f(x) = 4$

e) Del gráfico:

$f(4) = -1$

$f(-2) = 4$

Razonamiento y demostración

3. a: elementos de A

b: elementos de B

$\Rightarrow$ los que cumplen $a < b$: {(3; 7), (6; 7)}

$\Rightarrow$ R = {(3; 7), (6; 7)}

Clave C

4. Por ser función: $(3; 4) = (3; a^2)$

$a^2 = 4$

$a = \pm 2$

También: $(a; 7) = (2; 1) \Rightarrow a \neq 2$

$\therefore a = -2$

Clave B

5. $G(-7) = 2(-7) + 13 = -1$

$\therefore F(G(-7)) = F(-1) = 4(-1) - 1 = -5$

Clave E

6. $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

$\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-3\}$

Clave B

7. $-1 \leq x \leq 3$

$-4 \leq 4x \leq 12$

$-7 \leq 4x - 3 \leq 9 \Rightarrow -7 \leq f(x) \leq 9$

$\therefore \text{Ran}f = [-7; 9]$

Clave A

8. $y = 2x^2 + 3x + 2$

$2x^2 + 3x + 2 - y = 0$

Como $x \in \mathbb{R} \Rightarrow y \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Delta \geq 0$ $\quad \Delta = 9 - 4(2)(2 - y)$

$\Delta = 8y - 7$

Donde: Δ (discriminante)

$8y - 7 \geq 0$

$y \geq \frac{7}{8}$ $\quad \therefore \text{Ran}(x) = \left[\frac{7}{8}; +\infty\right\rangle$

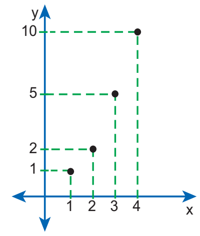
Clave D

9. $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 2(1) + 2 = 1$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 - 2(2) + 2 = 2$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 3^2 - 2(3) + 2 = 5$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 4^2 - 2(4) + 2 = 10$



10. Obreros con días son inversamente proporcionales:

$\Rightarrow y = \frac{k}{x}$ donde: y = obreros

x = días

Dato: $20 = \frac{k}{8} \Rightarrow k = 160$

Piden: $16 = \frac{k}{x}$

$\therefore x = \frac{160}{16} = 10$ días

Clave C

Resolución de problemas

11. $y = -2$ (función cte.) $\Rightarrow N = -2$

Para M:

Como se cortan: $y = -2 \wedge y = 2x + 4$

$\Rightarrow -2 = 2x + 4$

$-3 = x$

$\Rightarrow M = -3$

$\therefore M + N = -5$

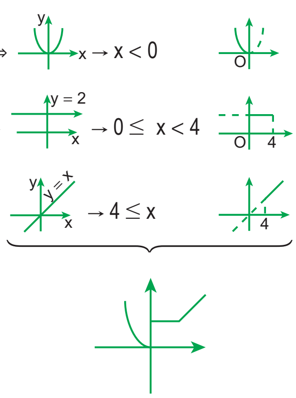
Clave C

12.

$f(x) = x^2 \Rightarrow \ldots \rightarrow x < 0$

$f(x) = 2 \Rightarrow \ldots \rightarrow 0 \leq x < 4$

$f(x) = x \Rightarrow \ldots \rightarrow 4 \leq x$



Uniendo los rangos: (gráfica de imágenes)

Clave B

Nivel 2 (página 101) Unidad 4

Comunicación matemática

13. A) b = c

B) $\mathbb{R}$

C) $Q(x) = 0$

D) $Q(x) \geq 0$

E) Función identidad

14.

A) Función cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow (0; 0) \in f \Rightarrow c = 0$

$y = ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow (-2; 4) \in f \Rightarrow 4 = 4a - 2b$

$\Rightarrow (2; 4) \in f \Rightarrow 4 = 4a + 2b$ $(-)$

$4b = 0 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow a = 1$

$\therefore y = x^2$

De la gráfica

B) De $x \in \langle -\infty, 0]$ (decrece)

De $x \in [0; +\infty\rangle$ (crece)

C) (0; 0)

D) (0; 0)

Razonamiento y demostración

15. De acuerdo a la correspondencia del diagrama sagital para cada una de las funciones tenemos:

$$k = \frac{2+2}{F(5)+F(3)} = \frac{4}{3+1}$$

$$k = \frac{4}{4} \quad \Rightarrow k = 1$$

Clave A

16. $A = \{3; 5; 7\}$

$B = \{2; 4; 6\}$

$A \times B = \{(3; 2); (3; 4); (3; 6); (5; 2); (5; 4); (5; 6); (7; 2); (7; 4); (7; 6)\}$

$R_1 = \{(x; y) \in A \times B / x + y = 9\}$

Luego:

$R_1 = \{(3; 6); (5; 4); (7; 2)\}$

$R_2 = \{(x; y) \in A \times B / y = 4\}$

Luego:

$R_2 = \{(3; 4); (5; 4); (7; 4)\}$

$R_1 - R_2 = \{(3; 6); (7; 2)\}$

$\therefore \text{Dom}(R_1 - R_2) = \{3; 7\}$

Clave A

17. Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$

Rango: $y = \dfrac{x+1}{x-2}$

Despejamos x $\Rightarrow x = \dfrac{1+2y}{y-1} \Rightarrow y \in \mathbb{R} - \{1\}$

Por lo tanto:

Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$

Rango: $\mathbb{R} - \{1\}$

Clave D

18. $-3 \leq x \leq 2$

$9 \geq -3x \geq -6$

$11 \geq 2 - 3x \geq -4$

$11 \geq y \geq -4$

$\therefore$ Ranf $= [-4; 11]$

Clave E

19. $5 - x > 0$

$5 > x$

Domf $= \langle -\infty; 5\rangle$

Clave C

20. $$\frac{x^3(x^2-5x+6)}{x(x-2)(x-3)} = \frac{x^2(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = x^2$$

$\Rightarrow f(x) = x^2$ con $x \notin \{0; 2; 3\}$

$\therefore$ Domf $= \mathbb{R} - \{0; 2; 3\}$

Clave B

21. $(0; 12) \in y \Rightarrow 12 = a(0) + b$

$b = 12$

$(6; 0) \in x \Rightarrow 0 = a(6) + 12$

$a = -2$

$\therefore a + b = -2 + 12 = 10$

Clave C

22. La gráfica es de la función inversamente proporcional.

$f(x)$: $y = \dfrac{k}{x}$ se observa que $(6; 2) \in f(x)$

Evaluamos:

$\Rightarrow 2 = \dfrac{k}{6} \Rightarrow k = 12$

La función es: $y = \dfrac{12}{x}$ $\Rightarrow (1; m)$ también $\in f(x)$, evaluamos:

$m = \dfrac{12}{1}$ $\quad \therefore m = 12$

Clave A

Resolución de problemas

23. $$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+2} = 1 + \frac{1}{x^2+2}$$

Sabemos:

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2$

$$0 < \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2}$$

Sumando 1:

$$1 < \underbrace{1 + \frac{1}{x^2+2}}_{f(x)} \leq \frac{3}{2}$$

$\therefore \text{Ran}(f) = \langle 1; \tfrac{3}{2}]$

Clave A

24. $F(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow F(0) = c = 2$

Completando cuadrados:

$$F(x) = a\left[x^2 + \frac{bx}{a}\right] + 2$$

$$= a\left[x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + 2$$

$$F(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] + 2 - \frac{b^2}{4a}$$

Por dato, $F(x) \geq 1 \Rightarrow 2 - \dfrac{b^2}{4a} = 1 \Rightarrow b^2 = 4a$

$$\therefore \frac{91a^2 - 5b^2}{11ab^2} = \frac{91a^2 - 5(4a)^2}{11a(4a)} = \frac{1}{4}$$

Clave C

Nivel 3 (página 102) Unidad 4

Comunicación matemática

25. De la gráfica:

A) DomF: $[-3; 5]$ DomG: $\{3; 7; 9\}$

RanF: $\left[-\frac{7}{2}; 3\right\rangle \cup \left[4; \frac{24}{5}\right]$ RanG: $\{-5; 8; 1\}$

B) $F(5) + G(3) = \frac{24}{5} + -5 = \frac{-1}{5}$

$F(0) - G(7) = 0 + 1 = 1$

C) $F(G(9)) = F(-3) = \frac{-7}{2}$

D) Creciente

26. Al trazar una recta vertical corta en 1 punto a: a), b) y d)

n.º de funciones = 3

Razonamiento y demostración

27. $(0; 2)$ y $(0; a - b) \in \mathbb{R}$ (por definición)

$\Rightarrow 2 = a - b$

$(5; 8)$ y $(5; a^2 - b^2) \in \mathbb{R}$

$\underbrace{a^2 - b^2}_{} = 8$ (diferencia de cuadrado)

$(a + b)\underbrace{(a - b)}_{2} = 8$

$a + b = 4$ ... (1)
$a - b = 2$ ... (2) (+)
$2a = 6$

$a = 3,\ b = 1$

$\therefore a^{-b} = 3^{-1} = 1/3$

Clave C

28. $H(4) = 2;\ G(0) = 6;\ G(1) = 2$

$H(7) = -9;\ G(-2) = 11$

$\Rightarrow C = \frac{2 + 6}{2 - (-9)} + \frac{3}{11} = \frac{8}{11} + \frac{3}{11} = 1$

Clave C

29. $\frac{b + 5}{-2 + 4} = 2 \Rightarrow b + 5 = 4$

$\Rightarrow b = -1$

Clave E

30. $f = \{(-1; -2), (0; -1), (1; 0), (2; 1), (3; 2)\}$

Se observa: $(0; -1) \in f$

Clave A

31. $-4 \le y \le -1$

$-4 \le \frac{x}{2} - 3 \le -1$

$-1 \le \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow -2 \le x \le 4$

Domf = $[-2; 4]$

Clave A

32. $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$

$xy - 3y = 2x + 1$

$xy - 2x = 3y + 1$

$x(y - 2) = 3y + 1$

$x = \frac{3y + 1}{y - 2} \Rightarrow y - 2 \ne 0 \Rightarrow y \ne 2$

$\therefore \text{Ran}(F) = \mathbb{R} - \{2\}$

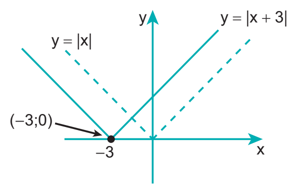
Clave C

33. $F(x) = \frac{x - 7}{(x + 4)(x - 2)},\ x \ne \{2; -4\}$

Domf = $\mathbb{R} - \{-4; 2\}$

Clave E

34. $y = |x|$ se desplaza 3 unidades a la izquierda y se forma $y = |x + 3|$



Cuando $x = -3 \Rightarrow y = 0$

$(-3; 0)$ pertenece a la gráfica

De la gráfica: Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $\mathbb{R}^+$

Clave A

35. Sea el vértice $V(h; k)$

$h = -\frac{b}{2a}$ $\quad f(x) = \underset{a}{1}x^2 + \underset{b}{(-6)}x + \underset{c}{3}$

$\Rightarrow h = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$

$\Rightarrow k = f(h) = f(3) = 3^2 - 6(3) + 3 \Rightarrow k = -6$

$\therefore$ Vértice$(h; k) = (3; -6)$

Clave B

Resolución de problemas

36. A mayor velocidad, menor tiempo.

$\Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

$V \cdot T = k$ ... (I)

$80 \cdot 3 = k$

$k = 240$

Para $T = 2$, de (I): $V \cdot (2) = 240$

$V = 120$ km/h

Clave C

37. $h(x) = -4\underbrace{(x^2 + 2x)}_{} - 1$

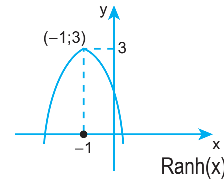
$y = -4((x + 1)^2 - 1) - 1$

$y = -4(x + 1)^2 + 3$

$\underset{k}{y - 3} = \underset{a}{-4}(x - \underset{h}{(-1)})^2$

$\Rightarrow$ vértice $(h, k) = (-1; 3);\ a < 0$

(La parábola se abre hacia abajo).



Ranh(x): $\langle -\infty; 3]$ ... (I)

$g(x) = 2\underbrace{(x^2 + 4x)}_{} + 1$

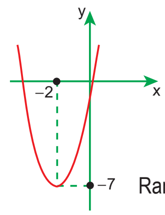
$g(x) = 2((x + 2)^2 - 4) + 1$

$y = 2(x + 2)^2 - 7$

$y + 7 = 2(x + 2)^2$

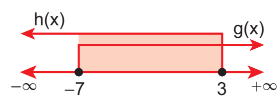
$\underset{k}{y - (-7)} = \underset{a}{2}(x - \underset{h}{(-2)})^2 \quad ; \quad a > 0$

Vértice $(h; k) = (-2; -7)$



Rang(x) = $[-7; +\infty\rangle$ ... (II)

(I) $\cap$ (II):



Ranh $\cap$ Rang: $[-7; 3]$

Clave E

38. Como F es una función lineal:

$\Rightarrow F(x) = ax + b$

Datos:

$F(1) = 2 \Rightarrow F(1) = a + b = 2$ ...(I)

$F(2) = 1 \Rightarrow F(2) = 2a + b = 1$ ...(II)

De (I) y (II):

$a = -1 \wedge b = 3$

$\Rightarrow F(x) = -x + 3$

Nos piden:

$F(20) + F(-18) = -20 + 3 + -(-18) + 3$

$F(20) + F(-18) = 4$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 106) Unidad 4

Comunicación matemática

1. La PA tiene razón $r = 20 - 16 = 4$

$\Rightarrow x = 8 + 4 = 12$

$y = 20 + 4 = 24$

$\therefore y/x = 2$

Clave C

2. $\frac{x}{3} = \frac{27}{x}$

$x^2 = 3 . 3^3$

$x = 9 \Rightarrow q = 3$

$y = 27 \times 3 = 3^4$

$z = 3^4 \times 3 = 3^5$

$\Rightarrow \frac{xy}{z} = \frac{3^2.3^4}{3^5} = 3$

Clave D

Razonamiento y demostración

3. En una PA se cumple que la razón:

$r = 22 - y - (2y + 8) = 2y + 8 - y^2$

$14 - 3y = 2y + 8 - y^2$

$y^2 - 5y + 6 = 0$

$y \quad -3$

$y \quad -2 \qquad \therefore y = 3 \wedge y = 2$

Clave E

4. Es una PA de razón 2.

$\Rightarrow s_n = \left(\frac{1 + 131}{2}\right)n \qquad \text{... (I)}$

$n = \frac{131 - 1}{2} + 1$

$n = 66$; en (I)

$s_n = 4356$

Clave B

5. Del enunciado:

$a_1 + a_5 = 14$

$a_1 + a_1 + 4r = 14$

$\Rightarrow a_1 + 2r = 7 \qquad \text{...(1)}$

Además:

$a_3 + a_6 = 20$

$a_1 + 2r + a_1 + 5r = 20$

$2a_1 + 7r = 20 \qquad \text{...(2)}$

De (1) y (2):

$r = 2 \wedge a_1 = 3$

$\Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

$\therefore a_4 = 3 + 3(2) = 9$

Clave D

6. PA_1: –9; –3; 3; 9...

$r = 6 \quad t_n = -9 + 6(n - 1)$

PA_2: 5; 10; 15; 20

$r = 5 \quad t_n = 5n$

Donde: $5n = -9 + 6(n - 1)$

$5n = -9 + 6n - 6$

$n = 15$

Clave B

7. : t_1; t_2; t_3

Datos:

- $t_2 + t_6 = 12 \qquad \text{...(I)}$

  Sabemos que: $t_n = t_1 + (n - 1)r$

  $t_2 = t_1 + r$; $t_6 = t_1 + 5r$

  Reemplazando en (I):

  $2t_1 + 6r = 12$

  $t_1 + 3r = 6 \qquad \text{...}(\alpha)$

- $t_5 + t_9 = 60 \qquad \text{...(II)}$

  $t_5 = t_1 + 4r$; $t_9 = t_1 + 8r$

  Reemplazando en (II):

  $2t_1 + 12r = 60$

  $t_1 + 6r = 30 \qquad \text{...}(\beta)$

$(\beta) - (\alpha)$:

$3r = 24 \Rightarrow r = 8$

En (α): $t_1 + 3(8) = 6$

$t_1 = -18$

Nos piden:

$t_4 = t_1 + 3r$

$\therefore t_4 = -18 + 3(8) = 6$

Clave D

8. Datos:

$t_1 = 12$; $t_n = 972$; $S_n = 1452$

Se sabe:

$t_n = t_1 q^{n-1}$

$972 = 12q^{n-1}$

$81 = q^{n-1} \Rightarrow q^n = 81q$ ...(I)

Además:

$S_n = t_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$

$1452 = 12\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$

$121(q - 1) = q^n - 1$ ...(II)

(I) en (II):

$121q - 121 = 81q - 1$ ...(II)

$\Rightarrow q = 3$

Reemplazando en (1):

$81 = q^{n-1}$

$3^4 = 3^{n-1} \Rightarrow 4 = n - 1$

$\therefore n = 5$

Clave E

9. $\underbrace{(1 + 2 + ... n)^2}_{} - \underbrace{1^3 + 2^3 + ... n^3}_{}$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = 0$$

Clave D

Resolución de problemas

10. $r = m^2 - m = 3m - m^2$

$2m^2 = 4m \Rightarrow m = 2$

Luego:

La P.A. es 2; 4; 6; ...

De razón $r = 2$

Como:

$a_{10} = 2 + 9(2) = 20$

$\therefore S_{10} = \left(\frac{2 + 20}{2}\right) . 10 = 110$

Clave D

11. $3; \underbrace{...}_{n \text{ términos}}; 23; \underbrace{...}_{2n \text{ términos}}; 59$

$a_{n+2} = a_1 + (n + 1)r$

$23 = 3 + (n + 1)r$

$20 = (n + 1)r$ ...(1)

Además:

$a_{3n+3} = 59 = 3 + (3n + 2)r$

$56 = (3n + 2)r$ ...(2)

Dividiendo (1) y (2):

$\frac{20}{56} = \frac{n + 1}{3n + 2}$

$\Rightarrow n = 4$

Reemplazando n = 4 en (1):

$20 = 5r$

$\therefore r = 4$

Clave B

12. : $5; \underbrace{...}_{x \text{ términos}}; 47; \underbrace{...}_{3x \text{ términos}}; 159$

n.° términos: $x + 2 = \frac{47 - 5}{r} + 1$

$r = \frac{42}{x + 1}$ ... (I)

$3x + 2 = \frac{159 - 47}{r} + 1$

$r = \frac{112}{3x + 1}$ ... (II)

Igualamos

(I) y (II): $\frac{42}{x + 1} = \frac{112}{3x + 1}$

$\therefore x = 5 \wedge r = 7$

Clave E

Nivel 2 (página 106) Unidad 4

Comunicación matemática

13. I. $10 - x = x - 2 \Rightarrow x = 6$

II. Como es PA la suma de las equidistantes es cte.

$\therefore x + y = 60 \Rightarrow z + 2 = 60$

$z = 58$

III. Piden n.° de términos

$\therefore$ n.° términos: $\frac{58 - 2}{4} + 1 = 15$

IV. $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \left(\frac{2 + 58}{2}\right)15 = 450$

V. $t_c = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{2 + 58}{2} = 30$

14. A) $q = 1/2$ Decreciente

$q = 7$ Creciente

$q = r$ Creciente

$q = -2$ Oscilante

B) $P = \dfrac{\dfrac{49}{1 - \frac{1}{7}}}{\left(\frac{5 + 49}{2}\right)n}$

$n = \frac{49 - 5}{4} + 1$

$n = 12$

$P = \dfrac{\frac{343}{6}}{27 \times 12} = 0,18$

Razonamiento y demostración

15. $: a; a^2; 3a$ (con arcos r, r) ...(1)

$\Rightarrow a^2 - a = 3a - a^2$

$2a^2 - 4a = 0$

$a(a-2) = 0$

$\Rightarrow a = 0 \vee a = 2$ ...(2)

De (1) y (2), necesariamente:

$a = 2 \Rightarrow r = 2$

Se tiene la PA:

$: 2; 4; 6; ...; \underbrace{2 + (n-1)2}_{a_n}; ...$

$\Rightarrow\ S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)10 = \left(\frac{2 + 2 + 2(n-1)}{2}\right)10 = 10(n+1)$

$\therefore S_n = 10(n+1)$

Clave C

16. Si:

$(x+3); (x); (2x); ...$ es una PG

$\Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{2x}{x}$

$x = 2x + 6$

$-x = 6$

Clave C

17. $: a;\ a + \sqrt{a};\ 2a; ...$ (con arcos r, r)

$r = \left(a + \sqrt{a}\right) - a = 2a - \left(a + \sqrt{a}\right)$

$\sqrt{a} = a - \sqrt{a}$

$2\sqrt{a} = a$

$4a = a^2$

$a = 4$

Luego, la PA es:

$: 4; 6; 8; 10; ...$

Por lo tanto:

La suma de los cuatro primeros términos es: 28

Clave B

18. 19; b; c; 61 (con arcos $+r$, $+r$, $+r$)

$61 = 19 + 3r \Rightarrow r = 14$

$b = 19 + r = 33$

$c = 33 + r = 47$

$\therefore\ \frac{b+c}{76} = \frac{80}{76} = \frac{20}{19}$

Clave D

19. Como:

$a_1 = 2^{-2} \wedge\ q = 2$

$\Rightarrow a_{49} = a_1 . q^{48} = 2^{-2} . 2^{48} = 2^{48-2}$

$\therefore\ a_{49} = 2^{46}$

Clave C

Resolución de problemas

20. $: : 7 ; ...; 448$

$S_n = 889$ (dato)

Sabemos que:

$t_n = t_1 q^{n-1}$

$448 = 7 . q^{n-1} \Rightarrow q^n = 64q$ ...(I)

$S_n = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1} = 889$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II):

$7\frac{(64q - 1)}{q - 1} = 889 \Rightarrow q = 2$

Reemplazando $q = 2$ en (I):

$2^n = 2^6 . 2 = 2^7$

$\therefore\ n = 7$

Clave C

21. Sabemos:

$: t_1 ; t_2 ; t_3 ; ...; t_n$

$t_1 = 1$

Dato: $: t_2; t_{10} ; t_{34}$ (PG)

Se cumple: $t_{10}^{\ 2} = t_2 . t_{34}$ ...(I)

Recuerde: $t_n = t_1 + (n-1)r$

En (I): $(1 + 9r)^2 = (1 + r)(1 + 33r)$

Reduciendo: $48r^2 = 16r \Rightarrow r = \frac{1}{3}$

Nos piden: $t_{67} = 1 + (67 - 1)r$

$\therefore t_{67} = 1 + 66 . \frac{1}{3} = 23$

Clave C

22. $S_6 = 9 . S_3$

Luego:

$a_1\left(\frac{q^6 - 1}{q - 1}\right) = 9 . a_1\left(\frac{q^3 - 1}{q - 1}\right)$

$(q^3 + 1)(q^3 - 1) = 9(q^3 - 1)$

$q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

Clave E

Nivel 3 (página 107) Unidad 4

Comunicación matemática

23. I. Vemos que los lados se reducen a la mitad

8; 4; 2; 1 ...

Es una PG de $q = 1/2$

$\Rightarrow$ Lado n.° 7 $= t_7 = 8 . (1/2)^6$

$= \frac{2^3}{2^6} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ cm

II. Áreas $8^2; 4^2; 2^2; ...$

$2^6; 2^4; 2^2; ...$ PG de razón $q = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow A_5 = t_5 = 2^6 . \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{2^6}{2^8} = \frac{1}{4}$ cm^2

III. de ii) $S_5 = \dfrac{2^6\left(\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1} = \dfrac{\frac{1}{2^4} - 2^6}{\frac{1}{4} - 1}$

$= 85{,}25\ \text{cm}^2$

IV. $S_{\text{límite}}$ de: $2^6; 2^4; 2^2; \ldots\ q = \frac{1}{4}$

$S_L = \dfrac{2^6}{1 - \frac{1}{4}} = 85{,}\widehat{3}\ \text{cm}^2$

24.

A) (V)

$5; \underbrace{\ldots}; -5$

4 medios aritméticos

$\Rightarrow r = \dfrac{5 - (5)}{4 + 1} = -2$ (razón de la PA)

$\Rightarrow$ la PA: $5; 3; \underbrace{1; -1; -3}; -5$

$\sum_{4 \text{ medios aritméticos}} = 0 \qquad = 0$

B) (F)

$\frac{1}{3}; \underbrace{\ldots}; \frac{1}{192}$

5 m. geométricos

$q = \sqrt[6]{\dfrac{\frac{1}{192}}{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ La PG $\frac{1}{3}; \underbrace{\frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{24}; \frac{1}{48}; \frac{1}{96}}; \frac{1}{192}$

$\Sigma_5 = \dfrac{\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{31}{32}\right)$ (F)

C) (F)

Sea la suma:

$S = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots 10^2$

$S = -1^2 + \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 \ldots 10^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Donde $n = 10$

$\Rightarrow S = -1 + \dfrac{10 \times 11 \times 21}{6} \neq \dfrac{10 \times 11 \times 21}{6}$

D) (F) es la semisuma

E) (V)

Clave D

Razonamiento y demostración

25. $a; \ldots; \dfrac{-201}{2}; -101$

$r = -\dfrac{1}{2}$

Sea n el n.° de términos: $S_n = 0$

$\left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right)n = 0$

$a_1 + a_n = 0 \Rightarrow a_1 = -a_n = 101$

Luego:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$-101 = 101 + (n - 1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$\dfrac{n - 1}{2} = 202 \Rightarrow n - 1 = 404$

$\therefore n = 405$

Clave C

26. Si $n = 1 \quad S_1 = t_1 = 13$

$n = 2 \quad S_2 = t_1 + t_2 = 46$

$t_2 = 33$

$\Rightarrow$ La PA: 13; 33; 53; ...

Piden $t_{21} = t_1 + (20)(20)$

$t_{21} = 13 + 400 = 413$

Clave C

27. Sabemos que:

$t_n = t_1 \,.\, q^{n-1}$

$972 = 12 \,.\, q^{n-1} \Rightarrow q^n = 81q \quad \ldots(I)$

Por fórmula:

$S_n = t_1 \dfrac{(q^n - 1)}{q - 1} \quad \ldots(II)$

Reemplazando (I) en (II):

$1452 = 12\dfrac{(81q - 1)}{q - 1}$

Desarrollando: $q = 3$

Reemplazando en (I):

$3^n = 3^5 \Rightarrow n = 5$

Clave C

Resolución de problemas

28. $a; a + r; a + 2r$

$a + a + r + a + 2r = 21$

$3a + 3r = 21$

$a + r = 7$

$\Rightarrow a = 7 - r \quad \ldots(1)$

Del enunciado:

P.G. $a + 3; \underbrace{a + r}_{7} + 3; a + 2r + 8$

$\Rightarrow \dfrac{10}{a + 3} = \dfrac{a + 2r + 8}{10}$

$100 = (7 - r + 3)(7 - r + 2r + 8)$

$100 = (10 - r)(15 + r)$

$100 = 150 - 5r - r^2$

$r^2 + 5r - 50 = 0$

r $\quad -5$

r $\quad +10 \qquad \Rightarrow r = 5$

Reemplazando $r = 5$ en (1):

$\Rightarrow a = 2$

Por lo tanto:

El mayor es: $2 + 2(5) = 12$

Clave B

29. a; a + r; a + 2r

$a + 3 = 2k;\ a + r + 10 = 4k;\ a + 2r + 2 = 3k$

$k = \dfrac{a+3}{2} = \dfrac{a+r+10}{4} = \dfrac{a+2r+2}{3}$

$a = r + 4$ ...(1)

$3a + 9 = 2a + 4r + 4$

$a = 4r - 5$ ...(2)

De (1) y (2):

$r + 4 = 4r - 5$

$9 = 3r \Rightarrow r = 3$

Reemplazando en (1):

$\therefore a = 7$

Clave E

30. : 18; 22; 26; ...

Sabemos que:

$S = (2t_1 + (n-1)r)\dfrac{n}{2}$

Reemplazando:

$(2 \,.\, 18 + (n-1) \,.\, 4)\dfrac{n}{2} = 480$

$4(9 + n - 1)\dfrac{n}{2} = 480$

$(n + 8)n = 240 = (12 + 8) \,.\, 12$

$\therefore n = 12$

Clave C

31. Del enunciado:

$t_1 + t_2 = 5$

Además, como cada término es igual a tres veces la suma de todos los términos que le siguen, entonces:

La PG es infinita.

$t_1 = 3(t_2 + t_3 + ...)$

$t_1 = 3(t_1 \,.\, q + t_1 \,.\, q^2 + t_1 \,.\, q^3 + ...)$

$t_1 = 3t_1(q + q^2 + q^3 + ...)$

$\dfrac{1}{3} = \dfrac{q}{1-q} \Rightarrow 1 - q = 3q$

$\therefore q = \dfrac{1}{4}$

Clave D

32. :: $t_1; t_1q; t_1q^2; t_1q^3; t_1q^4; t_1q^5$

Del enunciado:

$t_1 + t_1q^2 + t_1q^4 = 1365$

$\Rightarrow t_1(1 + q^2 + q^4) = 1365$ ...(I)

Además:

$t_1q + t_1q^3 + t_1q^5 = 5460$

$\Rightarrow t_1 \,.\, q(1 + q^2 + q^4) = 5460$ ...(2)

Dividiendo (1) y (2) tenemos:

$\dfrac{1}{q} = \dfrac{1365}{5460} \Rightarrow q = 4$

Clave E

MARATÓN MATEMÁTICA (página 109)

1. Determinamos

$f(5) = 3(5) - 2 = 13$

$f(-7) = 4 - (-7) = 11$

$f(3) = 3(3) - 2 = 7$

$f(1) = 4 - 1 = 3$

$\Rightarrow E = \dfrac{13 + 11}{7 + 3} = 2{,}4$

Clave D

2. 1; 3; 5; ... es una PA de razón 2

$t_{10} = 1 + (10 - 1)2 = 19$

Clave B

3. $\dfrac{1 + 3 + 5 + ...n}{2} = 32$

$\dfrac{\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2}{2} = 32$

$\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 = 64$

$\dfrac{n+1}{2} = 8$

$\Rightarrow n = 15$

Clave C

4. $G(x) = \dfrac{3-x}{x+4} = \dfrac{-(x+4)}{x+4} + \dfrac{7}{x+4}$

$G(x) = \dfrac{7}{x+4} - 1$

Formamos G(x) a partir del dominio:

$0 < x < 4$

$4 < x + 4 < 8$

$\dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{x+4} < \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{7}{8} < \dfrac{7}{x+4} < \dfrac{7}{4}$

$\dfrac{-1}{8} < \dfrac{7}{x+4} - 1 < \dfrac{3}{4}$

Clave D

5. ::4; ...; 2^{18}

Datos: $q = 4$

$T_n = T_1q^{n-1}$

$2^{18} = 2^2 \,.\, 2^{2(n-1)}$

$2^{16} = 2^{2n-2}$

$\Rightarrow 2n - 2 = 16$

$n = 9$

Clave C

6. $\log_4^2 x - 6\log_4 x + 8 = 0$

$\log_4 x \quad -4$

$\log_4 x \quad -2$

$\Rightarrow (\log_4 x - 4)(\log_4 x - 2) = 0$

$x_1 = 4^4;\ \ x_2 = 4^2$

$x_1 = 2^8 \quad x_2 = 2^4$

Clave C

7. $(2; 11) = (2; 3a - 5b)$

$11 = 3a - 5b \quad ...(1)$

$(5; a - 2b) = (5; 4)$

$4 = a - 2b \quad ...(2)$

Resolviendo de (1) y (2) tenemos:

$a = 2 \wedge b = -1$

$\therefore a^b = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Clave E

8. $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

$|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$

$|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$

$|x| \quad -1$

$|x| \quad -2$

$(|x| - 1)(|x| - 2) = 0$

$|x| = 1 \quad \vee \quad |x| = 2$

$x = \pm 1 \quad \vee \quad x = \pm 2$

Clave E

9. $|x - 3| = x + 1$

$\Rightarrow x - 3 = x + 1 \quad \vee \quad x - 3 = -x - 1$

$x \in \varnothing \quad \vee \quad 2x = 2$

$x = 1$

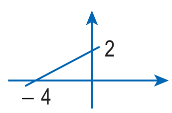
$\Rightarrow x = 1$

Clave C

10. Tabulamos $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0; 2) \in f(x)$

$y = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow (-4; 0) \in f(x)$

Ubicamos los puntos (0; 2) (–4;0) y unimos:



Clave D

11. Tomamos logaritmos en base b.

$\log_b b^{x+2} = \log_b 16$

$\log_b b^{4-2y} = \log_b 1/4$

Aplicando propiedad de logaritmos:

$x + 2 = \log_b 16 \quad ... (1)$

$4 - 2y = \log_b 1/4 \quad ... (2)$

De (1): $x = \log_b 16 - \log_b b^2 = 2\log_b 4/b$

De(2): $y = \dfrac{\log_b 4 + \log_b b^4}{2}$

$y = \frac{1}{2}\log_b 4b^4$

Formamos x/2 y 2y:

$\frac{x}{2} = \log_b 4/b$

$2y = \log_b 4b^4$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + 2y = \left(\log_b \frac{4}{b} + \log_b 4b^4\right) = \log_b 16b^3$

Clave A

12. $\dfrac{|15x| - 2}{4} < 7 \Rightarrow |15x| < 30$

$-30 < 15x < 30$

$-2 < x < 2$

$x \in \langle -2; 2 \rangle$

Clave C

13. $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + ... + \log_2 2^n$

$M = \log_2 2 + \log_2 2^2 + \log_2 2^3 + ... + \log_2 2^n$

$M = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Clave E

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344